UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.

SEGUNDA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Segundo Semestre 2009
(06/11/09)

Problema 1.

Dada $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 sen(y^2)}{x^2+y^2}, & si(x,y)\neq(0,0) \\ 0, & si(x,y)=(0,0) \end{cases}$ **probar que es diferenciable en el punto** $P_0=(0,0)$**. ¿Es continua en este punto?**

Solución:

Se calcula $L=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \dfrac{\Delta f - df}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$, con: $\Delta f = \dfrac{\Delta x^2 sen(\Delta y^2)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$;

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x^2\cdot 0}{\Delta x^2}}{\Delta x}=0 \quad ; \quad f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot sen\Delta y^2}{\Delta y^2}}{\Delta y}=0$$ 0.2 pts

y $df=0$ entonces: 0.6 pts.

$$L=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\Delta x^2 sen(\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)}}_{g(x,y)};$$ pero

$$g(x,y)\le\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\le\frac{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)}{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\varepsilon \quad si \quad \delta=\varepsilon.$$ y así $L=0$,

f es diferenciable en $P_0=(0,0)$. 0.8 pts.

De esto se deduce que f es continua en P_0; o bien con la definición. 0.4 pts.

De:

$$\left|f(x,y)-0\right| \leq \left|\frac{x^2 \operatorname{sen} y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} < \varepsilon \quad \text{si} \quad \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

Entonces:

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$ 0.4 pts.

Problema 2.

Dado el sistema $\left.\begin{array}{l} x^2-\dfrac{1}{y}+Ln(3u+4)+v-Ln16=0 \\ 3y^2+Ln\left(\dfrac{1}{u}\right)-3e^v-Ln\dfrac{1}{4}=0 \end{array}\right|$ **, y Po=(1,1,4,0).**

a) **Establecer que define funciones implícitas** $u=f(x,y)$ **,** $v=g(x,y)$ **en V(1,1).**

b) **Obtener las derivadas** u_x, u_y, v_x, v_y **en V(1,1).**

c) **Calcular la derivada direccional de** $u=f(x,y)$ **en P=(1,1) en la dirección del vector** $\hat{e}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Solución:

a)

Para el sistema $F=0, \quad G=0$ **se tiene:**

a.1)

$$F(1,1,4,0)=1-1+Ln16+0-Ln16=0$$

$$G(1,1,4,0)=3+Ln\frac{1}{4}-3-Ln\frac{1}{4}=0$$

a.2)

$$F_x=2x, \quad F_y=\frac{1}{y^2}, \quad F_u=\frac{3}{3u+4}, \quad F_v=1$$

$$G_x=0, \quad G_y=6y, \quad G_u=-\frac{1}{u}, \quad G_v=-3e^v$$

, continuas en V (Po,r)

a.3)

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{3}{3u+4} & 1 \\ -\dfrac{1}{u} & -3e^v \end{vmatrix} \Rightarrow J(P_0)=\begin{vmatrix} \dfrac{3}{16} & 1 \\ -\dfrac{1}{4} & -3 \end{vmatrix}=-\frac{9}{16}+\frac{1}{4}=-\frac{5}{16}\neq 0$$

Por lo tanto existen $u=f(x,y)$ **,** $v=g(x,y)$ y derivadas parciales calculadas del sistema dado:

0.8 pts.

b)

$$\left.\begin{array}{r} 2x+\dfrac{3}{3u+4}u_x+v_x=0 \\ 0-\dfrac{1}{u}u_x-3e^v v_x=0 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow u_x=\frac{\begin{vmatrix} -2x & 1 \\ 0 & -3e^v \end{vmatrix}}{J}=\frac{6xe^v}{J}\quad ; v_x=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{3}{3u+4} & -2x \\ -\dfrac{1}{u} & 0 \end{vmatrix}}{J}=\frac{\dfrac{2x}{u}}{J}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{3}{3u+4}u_y+v_y=0 \\ 6y-\dfrac{1}{u}u_y-3e^v v_y=0 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow u_y=\frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{y^2} & 1 \\ -6y & -3e^v \end{vmatrix}}{J}=\frac{\dfrac{3e^v}{y^2}+6y}{J}\quad ; v_y=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{3}{3u+4} & -\dfrac{1}{y^2} \\ -\dfrac{1}{u} & -6y \end{vmatrix}}{J}=\frac{-\dfrac{18y}{3u+4}-\dfrac{1}{y^2u}}{J}$$

0.8 pts.

c)

$$\nabla f(P_0)=\left(u_x(P_0),u_y(P_0)\right)=\left(-\frac{6}{5}\cdot 16,-\frac{9}{5}\cdot 16\right)=\left(\frac{-96}{5},\frac{-144}{5}\right)\Rightarrow$$

$$D_{\hat{e}}f(P_0)=\left(\frac{-96}{5},\frac{-144}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{48}{5\sqrt{2}}$$

0.4 pts.

3) Comprobar que $P_1=(1,0,\sqrt{2}),\ P_2=(1,0,-\sqrt{2})$ son puntos críticos (estacionarios) de la función $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ que verifican las condiciones $y^2-x+1=0$, $z^2-x-1=0$ Determinar la naturaleza de $f(P_1)$ y $f(P_2)$ asumiendo que el sistema define implícitamente $x=x(y);\quad z=z(y)\quad en\quad V(P_1)\quad y\quad V(P_2)$

Solución:

a) Puntos críticos:

Con $L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1\left(y^2-x+1\right)+\lambda_2\left(z^2-x-1\right)$ y sistema:

$$\left.\begin{array}{l} L_x=2x-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ L_y=2y+2\lambda_1 y=0 \\ L_z=2z+2\lambda_2 z=0 \\ L_{\lambda 1}=y^2-x+1=0 \\ L_{\lambda 2}=z^2-x-1=0 \end{array}\right|$$

0.4 pts.

P_1 y P_2 verifican el sistema siendo $\lambda_1=3,\ \ \lambda_2=-1$

0.6 pts.

b) El sistema de ecuaciones conformado por las ecuaciones de condición:

$F=y^2-x+1=0,\ \ G=z^2-x-1=0$ verificado por P_1 y P_2 tiene:

$F_x=-1,\ \ F_y=2y,\ \ F_z=0,\ \ G_x=-1,\ \ G_y=0,\ \ G_z=2z$ continuas;

$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 2z\end{vmatrix}=-2z\neq 0$ en P_1 y P_2

0.5 pts.

Las derivadas $x'(y),\ \ z'(y)$ calculadas del sistema:

$$\begin{array}{l} 2y-x'(y)=0,\ \ x'(y)=2y;\ \ 2zz'(y)-x'(y)=0\Rightarrow \\ z'(y)=\dfrac{2y}{2z}=\dfrac{y}{z}\quad \wedge\quad f'(y)=2x(y)x'(y)+2y+2z(y)z'(y) \\ =2x(y)2y+2y+2y=4y(x(y)+1);\ \ f'(P_1)=0,\ \ f'(P_2)=0 \\ f''(y)=4(x(y)+1)+4yx'(y)=4(x(y)+1)+8y^2 \\ \wedge\ \ f''(P_1)=8>0,\ \ f''(P_2)=8>0 \end{array}$$

Lo que determina $f(P_1)=3,\ \ f(P_2)=3$ valores mínimos de f 0.5 pts.