UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.
SEGUNDA PRUEBA DE CÁLCULO III 10129
Ingeniería Civil Primer Semestre 2014
(20/06/2014)

Problema 1:

Obtener los valores máximos y mínimos de $f(x,y)=4-4x^2-y^2$ **sujetas a las restricciones** $g(x,y)=2x+y-2=0, \quad con \quad x\geq 0, \quad y\geq 0.$

Solución:

Con $L(x,y,\lambda)=4-4x^2-y^2+\lambda(2x+y-2)$ El sistema para puntos críticos es:

$$\left.\begin{array}{r} L_x=-8x+2\lambda=0 \\ L_y=-2y+\lambda=0 \\ L_\lambda=2x+y-2=0 \end{array}\right| \Rightarrow x=\frac{\lambda}{4}, y=\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{\lambda}{4}\right)+\frac{\lambda}{2}=2 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}, \quad y=1$$

y $P_1=\left(\frac{1}{2},1\right)$ es un punto crítico.

Asimismo, de acuerdo a las condiciones son puntos críticos: $P_2=(1,0)$ y $P_3=(0,2)$; (en ambas f=0)

1 punto

En $P_1=\left(\frac{1}{2},1\right)$ ocurre $f'(x,y(x))=-8x-2y\cdot y'(x) \Rightarrow$ Con $y'(x)$ de condición, $y'(x)=-2$,

$f'(x,y(x))=-8x+4y \Rightarrow f''(x,y(x))=-8x+4y'(x)=-8-8=-16<0$ y $f\left(\frac{1}{2},1\right)=2$ es valor máximo.

En los puntos críticos $P_2=(1,0)$, $P_3=(0,2)$, tiene valor mínimo 0.

1 punto

Problema 2:

Evaluar $\iint_D (x+y)^2 e^{x-y}\,dxdy$ **si D es la región limitada por las rectas** $x+y=1;\ \ x+y=4;\ \ x-y=-1;\ \ x-y=1;$

Sugerencia: considerar el cambio de variables definido por las ecuaciones $x+y=u;\ \ x-y=v$

Solución:

Con el cambio de variables sugerido se obtiene nuevo dominio D' con $1\le u\le 4,\ \ -1\le v\le 1$. De sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=u \\ x-y=v \end{array}\right| \Rightarrow x=\frac{1}{2}(u+v),\quad y=\frac{1}{2}(u-v)$$

que determina: $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}=-\dfrac{1}{2}$ y $\boxed{|J|=\dfrac{1}{2}}$

1 punto

La integral doble sobre D se transforma en la integral doble sobre D':

$$\iint_{D'} (u)^2 e^v \left|-\frac{1}{2}\right| dudv=\frac{1}{2}\int_{u=1}^{u=4}\left(\int_{v=-1}^{v=1} u^2 e^v dv\right)du=\frac{1}{2}\left.\frac{u^3}{3}\right|_1^4 \left.e^v\right|_{-1}^1=\frac{1}{2}\,\frac{64-1}{3}(e^1-e^{-1})\Rightarrow$$

$$\boxed{\iint_D (x+y)^2 e^{x-y}\,dxdy=\frac{21}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)}$$

1 punto

<u>Problema 3:</u>

Resolver $\oint_C (x-y^3)dx+(x^3+y)dy$**, si C es la curva** $x^2+y^2=a^2$**.**

<u>Solución:</u>

Con parametrización de C: $\vec{r}(t)=(a\cos t, asent);\quad \vec{r}\,'(t)=(-asent, a\cos t);\quad t\in[0,2\pi]$

$$I=\int_0^{2\pi}[(a\cos t-a^3sen^3t)(-asent)+(a^3\cos^3 t+asent)a\cos t]dt$$

$$\int_0^{2\pi}[(-a^2sent\cos t+a^2sent\cos t+a^4sen^4t+a^4\cos^4 t)dt$$

1 punto

$$=a^4\int_0^{2\pi}(sen^4t+\cos^4 t)dt=a^4\int_0^{2\pi}[(sen^2t+\cos^2 t)^2-2sen^2t\cos^2 t]dt=$$

$$=2\pi a^4-2a^4\int_0^{2\pi}\left(\frac{sen2t}{2}\right)^2 dt=2\pi a^4-\frac{2a^4}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=2\pi a^4-\frac{2a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}2\pi\Rightarrow$$

$$\boxed{\oint_C (x-y^3)dx+(x^3+y)dy=\frac{3}{2}\pi a^4}$$

1 punto

Otra forma con Teorema de Green:

$$I=\iint_D(3x^2+3y^2)dxdy=3\iint_{D'}r^2rdrd\phi\underset{C.Polares}{=}3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a r^3dr\right)d\phi=\frac{3}{2}\pi a^4$$

2 puntos

De otra manera:

$$I=\underbrace{\oint xdx+ydy}_{0}+\underbrace{\oint_C -y^3dx+x^3dy}_{con\ Green}=\frac{3}{2}\pi a^4$$

2 puntos