UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.
SEGUNDA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO
Primer Semestre 11/06/2010
NOMBRE...RUT........................

PROBLEMA 1:

Sea $f : D \subseteq \Re^2 \longrightarrow \Re$, **dada por** $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

a) Obtener ∇f **en cada punto** $(x,y) \in D$.
b) ¿Es f **diferenciable en (0,0)?**
c) Calcular $D_{\hat{u}} f(P_o)$,**si** $P_o = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}, \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right)$ **y** $\hat{u}$ **está en la dirección de la recta** $y = x$.

SOLUCIÓN:

a) En $(x,y) \neq (0,0)$, $f_x = 2xsen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(x^2+y^2\right)\left(-\dfrac{1}{2}2x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-3}{2}} \cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$$f_x = 2xsen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}} \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f_y = 2ysen\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-1}{2}} \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\Longrightarrow \nabla f = (f_x(x,y), f_y(x,y)),\ si(x,y) \neq (0,0)$

En (0,0): $f_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\Delta x)^2 \cdot sen\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot sen\frac{1}{|\Delta x|} = 0$

(función sen es acotada)

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\Delta y)^2 \cdot sen\frac{1}{\sqrt{(\Delta y)^2}}}{\Delta y} = 0$$

....1.0

b) Se estudia $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \dfrac{\Delta f - df}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$: se tiene $df = 0$

Según a) y $\dfrac{\Delta f}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \dfrac{\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right) sen\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$

$= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} sen \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \to 0$ si $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$

Entonces, f es diferenciable en (0,0)

....0.5

c) Asumiendo f diferenciable en cada $(x, y) \in \Re^2$

$$D_{\hat{u}} f(P_o) = \nabla f(P_o) \circ \hat{u} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) \circ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{4}{\pi}$$

$$\left(ocon \hat{u} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow -\frac{4}{\pi} \right)$$

....0.5

PROBLEMA 2:

a) Verificar que la ecuación $x^2y - xy^2 + z^2\cos(xz) - 1 = 0$, **define z=z(x,y) en una vecindad** $\vee$ **del punto** $P_o = (0, \sqrt{2}, 1)$**.**

b) Obtener las derivadas z_x, z_y **en** $V(P_o)$.

c) Determinar la ecuación del plano tangente a z=z(x,y) en el punto $P_o = (0, \sqrt{2}, 1)$.

SOLUCIÓN:

a) Con $F(x, y, z) = x^2y - xy^2 + z^2\cos(xz) - 1 = 0$ se tienen condiciones:

a1) F,
$F_x = 2xy - y^2 - z^3 sen(xz)$
$F_y = x^2 - 2xy$
$F_z = 2z\cos(xy) - xz^2 sen(xy)$ continuas en $\Re^2$

a2) $F(0, \sqrt{2}, 1) = 0$, a3) $F_z(0, \sqrt{2}, 1) = 2 - 0 = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ existe en V función diferenciable z=z(x,y) que cumple:

$z_0 = 1 = z(0, \sqrt{2})$, $F(x, y, z(x, y)) = 0$ y

....1.0

b) $z_x = -\frac{2xy - y^2 - z^3 sen(xz)}{2z\cos(xy) - xz^2 sen(xy)}$, $z_y = -\frac{x^2 - 2xy}{2z\cos(xy) - xz^2 sen(xy)}$

....0.5

c) de b) $z_x(P_o) = -\frac{-2}{2} = 1$, $\quad z_y(P_o) = 0$, luego la ecuación del plano tangente es:

$$z - 1 = 1(x) + 0(y - \sqrt{2}) \Longrightarrow x - z + 1 = 0$$

....0.5

PROBLEMA 3:

Determinar los valores extremos de la función $f(x,y) = x^3 + xy^2$,**si x e y verifican la condicion** $xy - 1 = 0$

SOLUCION:

a) $L(x,y,\lambda) = x^3 + xy^2 + \lambda(xy - 1) \Longrightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} L_x = 3x^2 + y^2 + \lambda y = 0 \\ L_y = 2xy + \lambda x = 0 \\ L_z = xy - 1 = 0 \end{array} \right| \Longrightarrow x \neq 0, 2y + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2y$$

$$\Longrightarrow 3x^2 + y^2 - 2y^2 = 0 \Longrightarrow 3x^2 - y^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{c} 3x^2 - y^2 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{array} \right| \Longrightarrow \left| \begin{array}{c} 3x^2 - y^2 = 0 \\ x^2y^2 = 1 \end{array} \right| \Longrightarrow 3x^4 = 1 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \quad y = \sqrt[4]{3}, \quad P_o = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \sqrt[4]{3}\right), \ P_1 = -\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \sqrt[4]{3}\right)$$

....1.0

b) De $f(x,y) = x^3 + xy^2, f'(x, y(x)) = 3x^2 + y^2 + x^2y \cdot y'(x)$;

de $xy - 1 = 0 \Longrightarrow y + xy' = 0, \ y' = \frac{-y}{x}$

$f'(x, y(x)) = 3x^2 + y^2 - x2y\frac{y}{x} = 3x^2 - y^2 \Longrightarrow f''(x, y(x)) = 6x - 2yy' = 6x - 2y\left(-\frac{y}{x}\right) = 6x + \frac{2y^2}{x}$

$$f''(P_o) = 6\frac{1}{\sqrt[4]{3}} + 2\frac{\left(\sqrt[4]{3}\right)^2}{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}} > 0 \Longrightarrow f(P_0) \text{ mínimo;}$$

el valor del mínimo es:

$$f(P_o) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{3} = \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}, \qquad f''(P_1) = -\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3 + 1\left(-3^{\frac{1}{4}}\right) < 0$$

$\Longrightarrow$ f máximo

el valor del máximo es: $\qquad f(P_1) = -\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^3 - \sqrt[4]{3} = -\frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$

Se deduce en $V(P_0)$ desigualdad $f(x,y) = x^3 + xy^2 \geq \frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$ y en $V(P_1)$, $f(x,y) = x^3 + xy^2 \leq -\frac{4}{3^{\frac{3}{4}}}$

....1.0