UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.

PRIMERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2013
(29/11/2013)

Problema 1:

a) La función $f(x)=\ln\left|sen\frac{x}{2}\right|$**,con** $x\in(0,\pi]$**periódica de periodo** $2\pi, x\neq 2k\pi, k\in \mathrm{Z}$ **tiene serie de Fourier coseno convergente** $-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$**.**

Elegir $x_0\in(0,\pi]$ **que permita, usando la expresión anterior, determinar la serie numérica convergente a** $\ln 2$**.**

b) Obtener la integral de Fourier de $f(x)=e^{-|x|}senx,\quad x\in\Re$**. Deducir la covergencia de** $\int_0^{\infty}\frac{wsenw}{4+w^4}dw.$

Indicación: puede usar las fórmulas

$$sen\alpha sen\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},\qquad sen\alpha\cos\beta=\frac{sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+bsenbx)}{a^2+b^2},\qquad \int e^{ax}senbxdx=\frac{e^{ax}(asenbx+b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

Solución:

a) Como $f(x)=\ln\left|sen\frac{x}{2}\right|$, $x\in(0,\pi]$es continua $\forall x\quad en\quad (0,\pi]$entonces su serie de Fourier coseno es convergente y se tiene igualdad

$$\ln\left|sen\frac{x}{2}\right|=-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n},\quad \forall x\in(0,\pi]$$

Si se elige $x_0=\frac{\pi}{2}$ ocurre la convergencia

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=ln\left|sen\frac{\pi}{4}\right|=-ln\,2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\frac{n\pi}{2}}{n}\Rightarrow$$

$$ln\frac{\sqrt{2}}{2}=-ln\,2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\frac{n\pi}{2}}{n}\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\frac{n\pi}{2}}{n}=-ln\,2-ln\frac{\sqrt{2}}{2}=-ln\frac{2\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}ln\,2\Rightarrow$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-....\right)=-\frac{1}{2}ln\,2\Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...\frac{(-1)^{n-1}}{n}+...\right)=ln\,2$$

1 Punto

$f(x)=e^{-|x|}senx$, es tal que $f(-x)=e^{-|-x|}sen(-x)=e^{-|x|}sen(x)$, o sea

$f(x)=-f(-x)$ función impar. Tiene Serie de Fourier $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}B(w)senwxdw$ con

$$\Rightarrow B(w)=2\int_0^{\infty}f(v)senwvdv\Rightarrow B(w)=2\int_0^{\infty}e^{-|v|}senvsenwvdv=\int_0^{\infty}e^{-v}\left[cos(1-w)v-cos(1+w)v\right]dv$$

$$=\left[e^{-v}\frac{(-cos(1-w)v+(1-w)sen(1-w)v)}{1+(1-w)^2}-e^{-v}\frac{(-cos(1+w)v+(1+w)sen(1+w)v)}{1+(1+w)^2}\right]_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{1+(1-w)^2}-\frac{1}{1+(1+w)^2};\left(cuando\quad v\to\infty,[\qquad]^{\infty}=0\right)$$

$$=\frac{1+(1+w)^2-\left(1+(1-w)^2\right)}{\left(1+(1-w)^2\right)\left(1+(1+w)^2\right)}=\frac{4w}{4+w^4}$$

Entonces la integral es:

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{4wsenwx}{4+w^4}dw}$$

0.7 Puntos

Como $f(x) = e^{-|x|} senx$, es continua $\forall x$ entonces su integral de Fourier es convergente; en particular con $x_0 = 1$ se obtiene $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{4wsenwx}{4+w^4} dw = f(1) = e^{-1} sen1 \Rightarrow$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{wsenw}{4+w^4} dw = \frac{\pi \cdot sen1}{4e}}$$

0.3 Puntos

Problema 2:

Sea C dada por $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{2}{3}t^{3/2}, -t\right)$**,** $t \in [0,1]$

a) **Obtener la longitud de la curva L(C) entre los puntos** $(0,0,0) y \left(1, \frac{2}{3}, -1\right)$**.**

b) **Determinar curvatura** $k(t) \forall t \in \Re$ **y ubicar t en los cuales k(t) es mínima.**

c) **Escribir la ecuación del plano osculador en** $P_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{4}\right)$**.**

d) **Calcular la Torsión de C.**

Solución:

De $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{2}{3}t^{3/2}, -t\right)$**,** $t \in [0,1]$

$$\vec{r}'(t) = \left(1, t^{1/2}, -1\right), \ \left\|\vec{r}'(t)\right\| = (1+t+1)^{\frac{1}{2}} = (2+t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{r}''(t) = \left(0, \frac{1}{2}t^{-1/2}, 0\right)$$

a) $L(C)=\int_0^1 (2+t)^{\frac{1}{2}}dt=\left.\frac{(2+t)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right|_0^1=\frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)$

0.5 Puntos

b) $\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)=\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}},0,\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)\Rightarrow\left\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right\|=\left(\frac{1}{4}t^{-1}+\frac{1}{4}t^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}t^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot t^{1/2}}$

$$\Rightarrow k(t)=\frac{\left\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right\|}{\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|^3}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot t^{1/2}(2+t)^{3/2}}$$

Como $t\in[0,1]$ el valor k mínimo ocurre en t=1 (máximo de $t^{1/2}(2+t)^{3/2}$) y es $\Rightarrow k(1)=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot(3)^{3/2}}$

0.5 Puntos

c) En $P_1=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{12},-\frac{1}{4}\right)=\vec{r}\left(\frac{1}{4}\right)$, $\vec{r}\,'(\frac{1}{4})\times\vec{r}\,''(\frac{1}{4})=\left(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4}\right)$; La ecuación del plano osculador es:

$$\left[\vec{R}-\left(\frac{1}{4},\frac{1}{12},-\frac{1}{4}\right)\right]\circ\left(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4}\right)=0\Leftrightarrow x+z=0$$

0.4 puntos

d) Como $\vec{r}\,'''(t)=\left(0,-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}},0\right)$ con fórmula $\tau(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\circ\vec{r}\,'''(t)}{\left\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right\|^2}$ se tiene $\tau=0\quad\forall t$

La misma conclusión se logra de a) en atención a que C está en el plano $x+z=0$, (de ecuación en c))

0.6 puntos

Problema 3:

En cinemática el itinerario de una partícula está dado por la ecuación vectorial $\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t > 0$, de ella se puede deducir la velocidad instantánea en cada punto $\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = \left\|\vec{v}(t)\right\| \hat{T}$, donde $\left\|\vec{v}(t)\right\|$ es la rapidez y $\hat{T}$ el vector tangente. La aceleración es $\vec{r}\,''(t) = \vec{a}(t) = a_{\hat{T}} \hat{T} + a_{\hat{N}} \hat{N}$ donde $a_{\hat{T}}$ y $a_{\hat{N}}$ son las componentes tangencial y normal respectivamente, y $\hat{N}$ el vector normal. Deducir que las componentes $a_{\hat{T}}$ y $a_{\hat{N}}$ pueden ser calculadas por: $a_{\hat{T}} = \dfrac{\vec{v}(t) \circ \vec{a}(t)}{\left\|\vec{v}(t)\right\|}$, $a_{\hat{N}} = \dfrac{\left\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\right\|}{\left\|\vec{v}(t)\right\|}$. Aplicar estas fórmulas para calcular $a_{\hat{T}}$ y $a_{\hat{N}}$, en el instante t=1, si el itinerario es dado por $\vec{r}(t) = (t^2, 2t, t^3 - 1), \quad t > 0$.

Solución:

De ecuación $\vec{a}(t) = a_{\hat{T}} \hat{T} + a_{\hat{N}} \hat{N}$ se obtienen:

$$\vec{v}(t) \circ \vec{a}(t) = \left\|\vec{v}(t)\right\| \hat{T} \circ \left(a_{\hat{T}} \hat{T} + a_{\hat{N}} \hat{N} \right) = \left\|\vec{v}(t)\right\| a_{\hat{T}} \Rightarrow a_{\hat{T}} = \frac{\vec{v}(t) \circ \vec{a}(t)}{\left\|\vec{v}(t)\right\|}$$

$$\vec{v}(t) \times \vec{a}(t) = \left\|\vec{v}(t)\right\| \hat{T} \times \left(a_{\hat{T}} \hat{T} + a_{\hat{N}} \hat{N} \right) = \left\|\vec{v}(t)\right\| a_{\hat{T}} \left(\hat{T} \times \hat{T} \right) + \left\|\vec{v}(t)\right\| a_{\hat{N}} \left(\hat{T} \times \hat{N} \right) = \left\|\vec{v}(t)\right\| a_{\hat{N}} \hat{B} \Rightarrow$$

$$\left\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\right\| = \left\|\vec{v}(t)\right\| a_{\hat{N}} \Rightarrow a_{\hat{N}} = \frac{\left\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\right\|}{\left\|\vec{v}(t)\right\|}$$

1 Punto

Para:

$$\vec{r}(t) = (t^2, 2t, t^3 - 1), \quad t > 0$$

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = (2t, 2, 3t^2), \quad \vec{v}(1) = (2,2,3);$$

$$\vec{r}\,''(t) = \vec{a}(t) = (2,0,6t), \quad \vec{a}(1) = (2,0,6);$$

$$\left\|\vec{v}(1)\right\| = (4+4+9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{17}$$

$$\vec{v}(t) \times \vec{a}(t) = (12t, -6t^2, -4); \quad \vec{v}(1) \times \vec{a}(1) = (-12, -6, -4)$$

$$\left\|\vec{v}(1) \times \vec{a}(1)\right\| = \sqrt{196} = 14$$

así

$$a_{\hat{T}} = \frac{\vec{v}(1) \circ \vec{a}(1)}{\left\|\vec{v}(1)\right\|} = \frac{(2,2,3) \circ (2,0,6)}{\sqrt{17}} = \frac{22}{\sqrt{17}}$$

$$a_{\hat{N}} = \frac{\left\|\vec{v}(1) \times \vec{a}(1)\right\|}{\left\|\vec{v}(1)\right\|} = \frac{14}{\sqrt{17}}$$

1 Punto