UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.

PRIMERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Segundo Semestre 2009
(25/09/09)

Problema 1.

Para la función $f(x)=e^{-x}\cos x, x\geq 0$

a) **Obtener su integral de Fourier coseno**
b) **Deducir la convergencia de** $\int_0^\infty \frac{2+w^2}{4+w^4}dw$

Nota puede usar las formulas:

- $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$
- $\int e^{-x}\cos(bx)dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx)+bsen(bx))$

Solución:

Para $f(x)=e^{-x}\cos x$, $x\geq 0$ considerada extensión par su integral coseno es

$\int_0^\infty A(w)\cos wxdw$, con B(w)=0 y

$$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-v}\cos v\cos wvdv$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-v}\,\frac{1}{2}(\cos(1+w)v+\cos(1-w)v)dv$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-v}}{1+(1+w)^2}(-\cos(1+w)v+(1+w)sen(1+w)v)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\frac{e^{-v}}{1+(1-w)^2}(-\cos(1-w)v+(1-w)sen(1-w)v)\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+(1+w)^2}+\frac{1}{1+(1-w)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{1+(1-w)^2+1+(1+w)^2}{\left[1+(1+w)^2\right]\left[1+(1-w)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{4+2w^2}{\left(2+2w+w^2\right)\left(2-2w+w^2\right)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{(4+2w^2)}{\left[(2+w^2)^2-4w^2\right]}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{2(2+w^2)}{\left[4+4w^2+w^4-4w^2\right]}$$

$$A(w)=\frac{2}{\pi}\frac{(2+w^2)}{\left[4+w^4\right]}$$

Y la integral coseno es $\boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2+w^2\cos wx}{4+w^4}dw}$

1.5 pts.

b) con convergencia puntual en Xo=0, punto en el cual f es continua. Se tiene:

$$f(0)=1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2+w^2\cos wx}{4+w^4}dw\,.$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{2+w^2}{4+w^4}dw=\frac{\pi}{2}}$$

0.5 pts.

Problema 2.

Sea C una curva definida por el sistema $\left.\begin{array}{c} y^2+z^2=a^2 \\ x=mz \end{array}\right|$**, con a y m constantes.**

a) **Representar C de la forma** $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))\, con \quad t\in[a,b]$

b) **Determinar el punto de C en el cual** $\left\|\vec{r}'(t)\right\|=a$

c) **Obtener vectores** $\hat{T},\hat{N},\hat{B}$ **en cualquier punto de C.**

d) **Calcular la curvatura** $k(t)$ **y determinar el punto en que k es máxima.**

e) **Calcular la torsión** $\tau(t)$**.**

Solución:

a) Con parámetro t tal que $y(t)=a\cos t,\quad z(t)=asent,\quad x(t)=masent,\quad t\in[0,2\pi]$, se obtiene $\vec{r}(t)=(masent,a\cos t,asent),\quad t\in[0,2\pi]$

0.3 pts.

b)

$$\vec{r}'(t)=(ma\cos t,-asent,a\cos t),\left\|\vec{r}'(t)\right\|^2=m^2a^2\cos^2 t+a^2sen^2t+a^2\cos^2 t=$$

$$m^2a^2\cos^2 t+a^2 \quad con \quad \left\|\vec{r}'(t)\right\|^2=a^2 \quad se \quad tiene \quad m^2a^2\cos^2 t+a^2=a^2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$y \quad el \quad punto \quad de \quad C \quad pedido \quad es \quad P=\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(ma,0,a)$$

0.3 pts.

c)

$$\mathrm{T(t)}=\frac{\vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}=\frac{(ma\cos t,-asent,a\cos t)}{\sqrt{m^2a^2\cos^2 t+a^2}}$$

0.2 pts.

$\vec{r}''(t) = (-ma\operatorname{sen} t, -a\cos t, -a\operatorname{sen} t)$

Entonces $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = (a^2, 0, -ma^2)$ y $B(t) = \dfrac{(a^2, 0, -ma^2)}{\sqrt{a^4 + m^2a^4}}$ 0.2 pts.

$B(t) = \dfrac{(1,0,-m)}{\sqrt{1+m^2}}$; (vector constante)

El vector N se obtiene con $N(t) = B(t) \times T(t)$ 0.2 pts.

d) La curvatura:

$$k(t) = \frac{\left\| \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|^3} = \frac{a^2\sqrt{1+m^2}}{\left(\sqrt{m^2a^2\cos^2 t + a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$ 0.2 pts.

Como k(t) tiene numerador constante el máximo de k ocurre con el mínimo del denominador

$g(t) = \left(m^2a^2\cos^2 t + a^2\right)^{\frac{3}{2}}$ que sucede con cost=0 $\Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$. El punto de máximo es $\vec{r}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (ma, 0, a)$ y el valor de este máximo es $V - \left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{1+m^2}}{a}$ 0.2 pts.

e) Como B es constante, o como la curva es plana entonces $\tau(t) = 0 \quad \forall t$. O bien se calcula, además $\vec{r}'''(t) = (-ma\cos t, a\operatorname{sen} t, -a\cos t)$ y con formula:

$$\tau(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \bullet \vec{r}'''(t)}{\left\| \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \right\|}$$ 0.4 pts.

se tiene $\tau(t) = 0 \quad \forall t$

3) Sea C una curva dada por $\vec{r}\,'(s)$, parametrizada en función de la longitud de arco s, que tiene curvatura k y torsión τ constantes

a) Probar que el vector $\vec{D} = \tau \hat{T} + k \hat{B}$ es constante

b) Obtener el valor de $\left\| \vec{D} \right\|$

Solución:

a) Se calcula:

$$\frac{d\vec{D}}{ds} = \vec{D}'(s) = \frac{d\left(\tau \hat{T} + k \hat{B} \right)}{ds} = \frac{d\tau}{ds} T + \tau \frac{dT}{ds} + \frac{dk}{ds} B + k \frac{dB}{ds}, \text{en la cual}:$$

$$\frac{d\tau}{ds} = 0, \quad \frac{dk}{ds} = 0$$

porque k y τ son constantes. Además, como:

$\frac{dT}{ds} = kN, \ \frac{dB}{ds} = -\tau N$, resulta $\frac{d\vec{D}}{ds} = \tau kN + k(-\tau N) = 0 \Rightarrow \vec{D}$ es vector constante

1.5 pts.

b)

$$\left\| \vec{D} \right\|^2 = \left(\tau \hat{T} + k \hat{B} \right) \circ \left(\tau \hat{T} + k \hat{B} \right) = \tau^2 T \circ T + \tau k T \circ B + k\tau B \circ T + k^2 B \circ B = \tau^2 + k^2 \Rightarrow$$

$$\left\| \vec{D} \right\| = \left(\tau^2 + k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ya que $T \circ T = 1, \ B \circ B = 1, \ T \circ B = 0 \ \ B \circ T = 0$ 0.5 pts.