UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C.
PRIMERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10129
Ingeniería Civil Primer Semestre 2014
(14/05/2014)

Problema 1:

Dada la serie de Fourier de $f(x) = ax^2 + bx$ con $x \in [0,2\pi]$, a,b constantes reales que es

$$\frac{4\pi a^2}{3} + b\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4a}{n^2}\cos nx - \frac{4a\pi + 2b}{n}\, sen\, nx\right)$$

a) Establecer que esta serie es convergente $\forall\, x \in [0,2\pi]$. Justifique su respuesta.
b) Determinar constantes a y b de manera que se obtenga la función a la cual converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx$ y de esta expresión deducir el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.
c) Utilizar los apartados a) y b) para establecer la identidad de Parseval, pero sin resolver la integral.

Solución:

a) Como $f(x)$ es continua $\forall\, x \in [0,2\pi]$ entonces la serie de Fourier es convergente.

0,5 Puntos

b) Para obtener la suma $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, se requiere que $4a = 1$ y $\frac{4a\pi + 2b}{n} = 0$, con lo cual $\boxed{a = \frac{1}{4}}$

$$\pi + 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{\pi}{2}} \text{ y así } \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}}$$

0,8 Puntos

En particular con $x_0 = 0$ resulta $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

0,2 Puntos

c) Aplicando la identidad de Parseval en $[0,2\pi]$ con $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = 0$, $s(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}$

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}$$

(Hasta aquí se evalúa) 0,5 Puntos

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x^4}{16} + \frac{\pi^2}{4}x^2 + \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi}{4}x^3 + \frac{\pi^2}{12}x^2 - \frac{\pi^3}{6}x\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^5}{80} + \frac{\pi^2}{12}x^3 + \frac{\pi^4}{36}x - \frac{\pi}{16}x^4 + \frac{\pi^2}{36}x^3 - \frac{\pi^3}{12}x^2\right|_0^{2\pi}$$

$$= \pi^4\left(\frac{32}{80} + \frac{8}{12} + \frac{2}{36} - \frac{16}{16} + \frac{8}{36} - \frac{4}{12}\right) = \pi^4\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} - 1 + \frac{2}{9} - \frac{1}{3}\right) = \pi^4\left(\frac{1}{90}\right) \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

Problema 2

Sea C curva dada por $\vec{r}(t) = \left(1 + \cos t,\ 1 - \cos t, \sqrt{2}\, sen\, t\right),\ t\ \in [0,2\pi]$
a) Reparametrizarla en la forma $\vec{r} = \vec{r}(s)$ donde s es parámetro longitud de arco.
b) Determinar punto $P_1\ \in C$ desde $P_0 = (2,0,0)$ hasta P_1sea igual $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.
c) Muestre que C está en una superficie esférica y en una superficie plana.

d) Determinar ecuaciones de recta tangente y de plano osculador en el punto $P_2 = (0,2,0)$.

Solución:

a) $\overrightarrow{r'}(t) = \left(-\,sen\, t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t\right)$

$$\left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| = \sqrt{(-\,sen\, t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 + \left(\sqrt{2}\cos t\right)^2} = \sqrt{2}$$

Esto define $s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\, t \Rightarrow \boxed{t = \frac{s}{\sqrt{2}}}$, entonces:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(s) = \left(1 + \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 1 - \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\, sen \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \qquad s \in [0, L(C)]}$$

0,4 Puntos

b) $L_1(C) = \int_0^{t_1} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\, t_1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi}{2}}$ y

$P_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \cos\frac{\pi}{2}, 1 - \cos\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\, sen\ \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{P_1 = (1,1,\sqrt{2})}$

o directamente de $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$ con $t_1 = \frac{\frac{\sqrt{2}\pi}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$ y $\boxed{P_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1,1,\sqrt{2})}$

0,4 Puntos

c) De $\overrightarrow{r'}(t) = (-\,sen\,t, \mathrm{sen}\,t, \sqrt{2}\,cos\,t)$, $\overrightarrow{r''}(t) = (-\,cos\,t, \cos t, -\sqrt{2}\,sen\,t)$

$$\overrightarrow{r'}(t)\,x\,\overrightarrow{r''}(t) = \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\,sen\,t & \mathrm{sen}\,t & \sqrt{2}\,cos\,t \\ -\,cos\,t & \cos t & -\sqrt{2}\,sen\,t \end{pmatrix} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) \Rightarrow$$

$$\left\|\overrightarrow{r'}(t)\,x\,\overrightarrow{r''}(t)\right\| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = 2\,, \qquad \left\|\overrightarrow{r'}(t)\right\| = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$k(t) = \dfrac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{k(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$, $\forall t\,, k\ cte$. Entonces C está en una esfera.

Además $\overrightarrow{r'}(t)\,x\,\overrightarrow{r''}(t) \cdot \overrightarrow{r'''}(t) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) \cdot (\,sen\,t, -\mathrm{sen}\,t, -\sqrt{2}\,cos\,t)$

$= -\sqrt{2}\,sent + \sqrt{2}\,sent = 0\ \ \forall t$ y $\boxed{\tau(t) = 0}$ entonces C está en un plano.

De otra manera, usando los componentes de $\vec{r}(t)$ se tiene:

$i)$ $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = cos^2 t + cos^2 t + 2\,cos^2 t = 2$ que es una esfera centrada en $C = (1,1,0)$ y radio $a = \sqrt{2}$

$ii)$ $x + y = 1 + \cos t + 1 - \cos t = 2$ y C está en un plano.

0,8 Puntos

d) $\boxed{R_T = \vec{R}(\lambda) = (0,2,0) + \lambda(0,0,-\sqrt{2})}$;

Plano osculador $P_O = \left(\vec{R} - (0,2,0)\right) \cdot (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) \Leftrightarrow \boxed{x + y = 2}$

0,4 Puntos

<u>Problema 3</u>

La posición de una partícula en el espacio está dada por $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\,sent, t)\forall t \geq 0$
En el punto $P = (-\pi, 0, \pi)$ cambia la trayectoria siguiendo la línea tangente a $\vec{r} = \vec{r}(t)$ con una rapidez constante igual al doble de la que llevaba en P.

a) Determine la ubicación de la partícula 5 segundos después del cambio de dirección.
b) ¿En qué punto los vectores velocidad y aceleración son perpendiculares?,¿Cuáles son esos vectores?

<u>Solución:</u>

a) En el punto $P = \vec{r}(\pi) = (-\pi, 0, \pi)$
$\overrightarrow{r'}(t) = (cos\,t - t\,sen\,t, sen\,t + t\,cost, 1)$

$\overrightarrow{r'}(\pi) = \boxed{(-1, -\pi, 1)}$ Es velocidad en P,

$\left\|\overrightarrow{r'}(\pi)\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-\pi)^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{2 + \pi^2}}$ Es rapidez en P.

0,4 Puntos

Ecuación de recta tangente en P es $\vec{R}(\lambda) = (-\pi, 0, \pi) + \lambda(-1, -\pi, 1)$ desde que cambia de dirección recorre $2\sqrt{2+\pi^2} \cdot 5 = \boxed{10\sqrt{2+\pi^2}}$

0,4 Puntos

Es decir, se debe verificar que $\|(x, y, z) - (-\pi, 0, \pi)\| = t\|-1, -\pi, 1\| = 10\sqrt{2+\pi^2} \Rightarrow \boxed{t = 10}$
Entonces el móvil se encuentra en el punto $\boxed{Q = (-\pi - 10, -10\pi,\ \pi + 10)}$

0,4 Puntos

b)
$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (cos\ t - t\ sen\ t, sen\ t + \ t\ cost, 1)$

$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = (-sen\ t - sen\ t - t\cos t, \cos t + \cos t - t\ sen\ t, 0) \Rightarrow$

$\vec{a}(t) = (-2sen\ t - t\cos t, 2\cos t - t\ sen\ t, 0)$

Para que sean perpendiculares, $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0 \Rightarrow$

$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = (cos\ t - t\ sen\ t)(-2sen\ t - t\cos t) + (sen\ t + \ tcost\ )(2\cos t - t\ sen\ t) + (1)(0)$

$= -2sent\ t\cos t - t\ cos^2 t + 2t\ sen^2 t + t^2 sen\ t\cos t + 2sent\cos t - t\ sen^2 t + \ 2tcos^2 t - t^2 sen\ t\cos t$

$= -t + 2t = t \Rightarrow t = 0 \ \Rightarrow \boxed{P_0 = (0,0,0)}$ Punto en que $\vec{v}(t) \perp \ \vec{a}(t)$

0,6 Puntos

En este punto
$\boxed{\vec{v}(0) = (1,0,1)}$ y $\boxed{\vec{a}(0) = (0,2,0)}$

0,2 Puntos