UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.

PRIMERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO

Primer Semestre 07/05/2010

NOMBRE..RUT........................

1.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1/2 \\ 2(1-x) & , \quad 1/2 < x < 1 \end{cases}$ **, obtener:**

a) La serie de Fourier de senos en el intervalo $(0,1)$.

b) Pruebe la convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

SOLUCIÓN:

a) Para obtener la serie de Fourier senoidal de $f(x)$ $\forall x \in (0,1)$, es necesario, considerar la extensión impar de la función $f(x)$.

....0.1

Así:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \; sen(n\pi x)$$

con coeficientes:

$a_0 = a_n = 0$

$b_n = 2\int_0^1 f(x) sen(n\pi x) dx$

$b_n = 2(\int_0^{1/2} 2x \; sen(n\pi x) \; dx + \int_{1/2}^1 2(1-x) \; sen(n\pi x) \; dx)$ (integrando por partes)

....0.4

$b_n = 2\left[-2x \; \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big]_0^{1/2} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{1/2} \cos(n\pi x) dx - 2(1-x) \; \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big]_{1/2}^1 - \frac{2}{n\pi}\int_{1/2}^1 \cos(n\pi x) dx \right]$

$b_n = 2\left[-\frac{1}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{(n\pi)^2} sen(\frac{n\pi}{2}) + \frac{1}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{(n\pi)^2} sen(\frac{n\pi}{2}) \right]$

$b_n = \frac{8}{(n\pi)^2} sen(\frac{n\pi}{2})$

$b_n = \begin{cases} 0 & , \quad si \; n \; par \\ \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n-1} & , \quad si \; n \; impar \end{cases}$

....0.5

Por tanto la serie de Fourier de $f(x)$ viene dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\left(-1\right)^{n-1}}{\left(2n-1\right)^{2}\pi^{2}} sen\left(\left(2n-1\right)\pi x\right)$$

....0.2

b) En $x = 1/2$ se tiene un punto de discontinuidad de $f(x)$, luego aplicando el teorema de de convergencia de Fourier tenemos:

....0.2

$$\frac{f\left(1/2^{+}\right) + f\left(1/2^{+}\right)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\left(-1\right)^{n-1}}{\left(2n-1\right)^{2}\pi^{2}} sen\left(\left(2n-1\right)\pi x\right)$$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\left(-1\right)^{n-1}}{\left(2n-1\right)^{2}\pi^{2}} sen\left(\left(2n-1\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

....0.2

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\left(-1\right)^{n-1}}{\left(2n-1\right)^{2}\pi^{2}} \left(-1\right)^{n-1}$$

$$\frac{\pi^{2}}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2n-1\right)^{2}}$$

....0.4

2.- Sea la trayectoria $\overrightarrow{c}(t) = (cost)i + (sent)j + tk$

a) Hallar las coordenadas del punto en que esta trayectoria cruza la superficie : $z = \pi(x^2 + y^2)$

b) Calcular la velocidad y la rapidez en dicho punto.

c) La longitud de la trayectoria hasta el punto de impacto si parte en t = 0

d) Determine las componentes tangencial y normal de la aceleración en el punto de intersección.

e) El valor de la torsión en el punto de impacto.

SOLUCIÓN:

a) Reemplazando x, y y z de la ecuación de la superficie por sus expresiones en términos de tenemos:

$$t = \pi\left(\cos^2 t + sen^2 t\right) = \pi \implies \begin{cases} x = \cos t = -1 \\ y = sent = 0 \\ z = t = \pi \end{cases}$$

....0.4

b) $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{c}'(t) = (-sent, \cos t, 1) \implies \overrightarrow{v}(\pi) = \overrightarrow{c}'(\pi) = (-sen\pi, \cos\pi, 1) = (0, -1, 1)$

$\|\overrightarrow{v}(t)\| = \|\overrightarrow{c}'(t)\| = \sqrt{2}$

....0.4

c)

$$l=\int_0^{\pi}\|\overrightarrow{c}'(t)\|\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{2}dt=2\pi$$

....0.4

d) Las componentes de la aceleración en el punto de impacto es

$$a_T=\frac{\overrightarrow{c}'(\pi)\cdot\overrightarrow{c}''(\pi)}{\|\overrightarrow{c}'(\pi)\|}=\frac{(0,-1,1)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{2}}=0$$

$$a_N=\frac{\|\overrightarrow{c}'(\pi)\times\overrightarrow{c}''(\pi)\|}{\|\overrightarrow{c}'(\pi)\|}=\frac{\|(0,1,1)\|}{\sqrt{2}}=1$$

....0.4

e)

$$\tau(\pi)=\frac{\overrightarrow{c}'(\pi)\times\overrightarrow{c}''(\pi)\cdot\overrightarrow{c}'''(\pi)}{\|\overrightarrow{c}'(\pi)\times\overrightarrow{c}''(\pi)\|^2}=\frac{(0,1,1)\cdot(0,1,0)}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

....0.4

3.- Sea la trayectoria regular $\overrightarrow{r}:I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$, definida por $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(s)$ donde $s\in I$ es el parámetro longitud de arco y $s=\varphi(t)$.

a) Pruebe que para todo punto de la trayectoria $\overrightarrow{r}$ el vector $\overrightarrow{r}'''(t)$ esta en el plano osculador.

b) Expresar el vector $\overrightarrow{r}'''(t)$ como una combinación lineal de la base $\left\{\hat{T},\hat{N},\hat{B}\right\}$

SOLUCION:

De $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(s)$ con $s=\varphi(t)$,

a) $\overrightarrow{r}'(t)=\dfrac{d\overrightarrow{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt}=s'(t)T(s)$,

....0.4

$$\overrightarrow{r}''(t)=s''(t)T(s)+s'(t)\frac{dt}{ds}s'(t)$$

....0.2

$$\Longrightarrow\overrightarrow{r}''(t)=s''(t)T(s)+\left(s'(t)\right)^2kN(s)$$

....0.2

y así $\overrightarrow{r}''(t)$ está en el plano T,N, osea en el plano osculador

b) De $\overrightarrow{r}''(t) = s''(t)T(s) + (s'(t))^2 k(s)N(s)$,

$$\overrightarrow{r}'''(t) = s''(t)T(s) + s''(t)\frac{dT}{ds}s'(t) + 2s'(t)s''(t)k(s)N(s) + (s'(t))^2\left(\frac{dk}{ds}s'(t)N(s) + k(s)\frac{dN}{ds}s'(t)\right)$$

....0.6

$= \left(s'''(t) - k^2(s)\right)T + \left(s''(t)k(s)s'(t) + 2s'(t)s''(t)k(s) + (s'(t))^3\frac{dk}{ds}\right)N +$
$(s'(t))^2(k(s)\tau(s))B$

....0.6