U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

TERCERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Primer Semestre 2006

1) Evalue $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}}$; si $n \in \mathbb{Z}$ y D es la región limitada por las esferas centradas de radios r_1 y r_2 tal que $0 < r_1 < r_2$. ¿Para qué valores de n la integral tiene límite cuando $r_1 \to 0^+$?

Solución

Usando coordenadas esféricas:
$x = \rho\cos(\theta)sen(\phi)$
$y = \rho\sin(\theta)sen(\phi)$
$z = \rho\cos(\phi)$

y $|J| = \rho^2\sin(\phi)$

$$\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}} = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(\rho^2)^{\frac{n}{2}}}\rho^2\sin(\phi)d\rho d\theta d\phi = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{r_1}^{r_2}\rho^{(2-n)}\sin(\phi)d\rho d\theta d\phi$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^{(3-n)}}{3-n}\Big|_{r_1}^{r_2} sin(\phi)d\theta d\phi = \frac{4\pi}{3-n}(r_2^{(3-n)} - r_1^{(3-n)})$$

por lo tanto
$$\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{4\pi}{3-n}(r_2^{(3-n)} - r_1^{(3-n)})$$

$$\lim_{r_1\to 0^+}\frac{4\pi}{3-n}(r_2^{(3-n)} - r_1^{(3-n)}) = \frac{4\pi r_2^{(3-n)}}{3-n} \text{ si } 3-n>0 \text{ ó } n<3$$
esta integral tiene límite cuando $n < 3$

2) Sea D la región del primer cuadrante limitada por las rectas $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$ y el arco correspondiente del círculo $x^2 + y^2 = 1$.

a) Pruebe que $F(x, y) = -x^2y\hat{\imath} + xy^2\hat{\jmath}$ definida en la región D. Cumple con las condiciones del Teorema de Green.

b) Evalúe $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$

Solución

a)$P = -x^2y$ y $Q = xy^2$ son de clase C^1. La región D es compacta y la curva frontera de la región es seccionalmente continua de C^1

b)El Teorema de Green establece en este caso que
$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_C -x^2ydx + xy^2dy$$
donde C es la frontera de la región D y está formada por 4 curvas:
$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$
$C_1 : x = t;\ y = 0;\ 1 \leq t \leq 4$
$$I_1 = \int\limits_{C_1} -x^2ydx + xy^2dy = \int_1^4 0 = 0$$
$C_2 : x = 4 - t;\ y = t;\ 0 \leq t \leq 4$
$$I_2 = \int_0^4 -(4-t)^2tdt + (4-t)t^2dt = \int_0^4(16t - 4t^2)dt = \frac{128}{3}$$
$C_3 : x = 0;\ y = 4 - t;\ 0 \leq t \leq 3$
$$I_3 = \int\limits_{C_3} -x^2ydx + xy^2dy = 0$$

$C_4 : x = \sin(t);\ y = \cos(t);\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$\implies \int\limits_{C_4} -x^2ydx + xy^2dy = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^2(t)dt = -\frac{\pi}{8}$

por lo tanto

$\int\limits_C -x^2ydx + xy^2dy = \frac{128}{3} - \frac{\pi}{8}$

y por Green

$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \frac{128}{3} - \frac{\pi}{8}$

3) Evalúe $\iint\limits_S (z+y^2)dS$, S es la porción de la superficie cilíndrica circular dada por $S : x^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$

Solución

Sea $\phi(u,v) = (\cos(u), v, \sin(u))$ con $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 1$, parametrización de la superficie S.

$T_u = (-\sin(u), 0, \cos(u))$

$T_v = (0,1,0)$

$T_u \times T_v = (-\cos(u), 0, -\sin(u)) \implies \|T_u \times T_v\| = 1$

$\iint\limits_S (z+y^2)dS = \iint\limits_D (\sin(u)+v^2)dudv = \int\limits_0^1\int\limits_0^\pi (\sin(u)+v^2)dudv = 2 + \frac{\pi}{3}$

otra forma

$f(x,y,z) = z + y^2$

$z = \sqrt{1-x^2}$ la superficie y $R_{xy} : -1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt[2]{1-x^2}}$

$\iint\limits_S (z+y^2)dS = \iint\limits_{R_{xy}} (\sqrt{1-x^2}+y^2)\sqrt{1+(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})^2}dxdy = \iint\limits_{R_{xy}} (\sqrt{1-x^2}+y^2)(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dxdy$

$= \iint\limits_{R_{xy}} dxdy + \iint\limits_{R_{xy}} \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}dxdy$

$= 2 + \int\limits_0^1\int\limits_{-1}^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}dxdy = 2 + \int\limits_0^1 y^2 \arcsin x\ |_{-1}^1 dy = 2 + \int\limits_0^1 y^{2(}(\arcsin(1) - \arcsin(-1))dy$

$= 2 + \int\limits_0^1 y^2(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}))dy = 2 + \frac{\pi}{3}$