U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

TERCERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Primer Semestre 2008

Pregunta 1

Calcular el valor de $I = \int_C \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}dx + \sqrt{1+x^2}dy$

si C es:
a) Trazo rectilíneo que une $A = (0,1)$ con $B = (1,2)$
b) Arco $y = 1 + x^2$ entre $A = (0,1)$ y $B = (1,2)$
c) Curva $x^2 + y^2 = 1$

Respuesta.

$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}, \sqrt{1+x^2}\right)$ es de clase $C^{(1)}$ y
cumple $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1+x^2}\right)$ con lo cual
$\overrightarrow{F}$ es campo gradiente con potencial $\phi(x,y) = y\sqrt{1+x^2}$
y $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ es independiente de curva C.

Así,
a) $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \phi(1,2) - \phi(0,1) = 2\sqrt{2} - 1$
b) $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \phi(1,2) - \phi(0,1) = 2\sqrt{2} - 1$
Nota: también *a)* y *b)* se obtienen parametrizando C como
$\overrightarrow{r}(t) = (t, t+1)$, $t \in [0,1]$ en *a)* y $\overrightarrow{r}(t) = (t, t^2+1)$, $t \in [0,1]$ en *b)*.
c) Como C es una curva cerrada y $\overrightarrow{F}$ campo gradiente, entonces
$\oint \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$

Pregunta 2

Resolver $\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} dS$ para $\overrightarrow{F} = (xy^2, yz^2, x^2z)$ con $S = S_1 \cup S_2$
dados por $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ y $0 < a < b$

Respuesta.

Por ser $\overrightarrow{F}$ de clase $C^{(1)}$,y S encierra un sólido,
S regular rige el teorema de Gauss y por tanto
$\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_R \nabla \cdot \overrightarrow{F} dV$, en que

$\nabla \cdot \overrightarrow{F} = \nabla \cdot \left(xy^2, yz^2, x^2z\right) = y^2 + z^2 + x^2$, con
$(x, y, z) \in \mathbb{R}$ que cumple $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ (sólido en $\mathbb{R}^3$).

Así, $\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_R \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$ que resulta
con coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ;
$J = \rho^2 sen\theta$ da $\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \int_a^{b} \rho^4 sen\theta \right) d\rho d\theta d\phi$
$= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_a^b = \frac{4\pi}{5}\left(b^5 - a^5\right)$
Nota: la integral de superficie propuesta también se puede resolver
directamente con
$\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} dS = \int\int_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} dS + \int\int_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} dS$, parametrizando
S_1 y S_2 de manera adecuada, por ejemplo:
S_1: $\overrightarrow{r}(u, v) = (a \cos u \ senv, a \ senu \ senv, a \cos v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$
S_2: $\overrightarrow{r}(u, v) = (b \cos u \ senv, b \ senu \ senv, b \cos v)$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$

Pregunta 3

Determinar el volumen V del sólido limitado inferiormente por
superficie $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la superficie $x + y + z = a$, $a > 0$

Respuesta.

La intersección del paraboloide y el plano determina región de integración
(dominio D)

$x^2 + y^2 = a - x - y \Longleftrightarrow x^2 + x + y^2 + y = a \Longleftrightarrow$
$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{2}$, circunferencia con centro $C = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
y radio r=$\sqrt{a + \frac{1}{2}}$ que encierra D.
Con integral triple el volumen es:
$V = \int\int_D \left(\int_{x^2+y^2}^{a-x-y} dz \right) dxdy = \int\int_D \left(a - x - y - x^2 - y^2\right) dxdy$
$= \int\int_D \left[a - \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)\right] dxdy$
$= \int\int_D \left(a + \frac{1}{2} - u^2 - v^2\right) dudv$, si $u = x + \frac{1}{2}; v = y + \frac{1}{2}$
$= \int\int_D \left(a + \frac{1}{2} - r^2\right) rdrd\varphi$, (con coordenadas polares); $0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq r \leq \sqrt{a + \frac{1}{2}}$
$= 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\left(a + \frac{1}{2} - r^2\right)^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{a+\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2}\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$
o bien esto último:
$= \int\int_{D'} \left(a + \frac{1}{2}\right) rdrd\varphi - \int\int_{D'} r^3 drd\varphi$
$= \left(a + \frac{1}{2}\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{a+\frac{1}{2}}} - 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Bigg|_0^{\sqrt{a+\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2}\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$