U. DE SANTIAGO DE CHILE FAC. DE CIENCIA DEP. DE MATEMÁTICA Y C.C.

PRIMERA PRUEBA CÁLCULO AVANZADO 10007

Ingeniería Civil Segundo Semestre 2008

Pregunta 1

a) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ 3x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, periódica de periodo 2,

que tiene como serie de Fourier,

$\frac{3}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-4}{\pi^2(2n-1)^2} \cos\left((2n-1)\pi x\right) - \frac{2}{\pi n} sen(2n\pi x) \right]$ para todo $x \in (-1,1)$

Deducir justificando la respuesta el valor al cual converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

Solución.

Con $x_0 = 0$, punto en que f es discontinua con $f(0_-) = 2, f(0_+) = 0$, y $f(x)$ es seccionalmente continua en $(-1,1)$, se tiene la convergencia de la serie

$$\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi^2(2n-1)^2} = \frac{0+2}{2} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$ 0.5

b) Obtener la Integral de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$. Del resultado, deducir el valor de $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos w}{1+w^2} dw$

Solución.

Como $f(x) = e^{-|x|}$ verifica $f(-x) = e^{-|-x|} = e^{-|x|} = f(x)$ entonces $f(x)$ es función par. Tiene integral de Fourier

$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} A(w) \cos(wx) dw$, ya que $B(w) = 0$, con $A(w) = 2 \int\limits_0^{\infty} e^{-v} \cos(wv) dv = 2 \left[\frac{e^{-v}}{1+w^2} (-\cos(wv) + w sen(wv)) \right]_0^{\infty} = \frac{2}{1+w^2}$

Por lo tanto $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{2}{1+w^2} \cos(wx) dw = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos(wx)}{1+w^2} dw$

Considerando que $f(x) = e^{-|x|}$ es contínua $\forall x$, en $x_0 = 1$ se obtiene la convergencia

$f(1) = e^{-1} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos w}{1+w^2} dw$, y $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2e}$ 1.5

Pregunta 2
Sea C una curva dada por $\overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{(1+t)^{3/2}}{3}, \frac{(1-t)^{3/2}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$, con $t \in I \subset \mathbb{R}$.
a) Determinar el mayor intervalo I en el cual la curva C es regular.
b) Calcular $L(C)$, longitud de C, si $t \in I$.
c) Verificar que $\overrightarrow{r}'(t)$ es perpendicular a $\overrightarrow{r}''(t)$ en todo punto de C.
d) Obtener los versores $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ en el punto $P_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$
Solución.

a) I debe ser dominio de $\overrightarrow{r}(t)$, lo que requiere que $1+t \geq 0$ y $1-t \geq 0 \implies t \geq -1$ y $1 \leq t \implies t \in [-1,1]$.

Además $\overrightarrow{r}'(t) = \left(\frac{(1+t)^{1/2}}{2}, -\frac{(1-t)^{1/2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \neq (0,0,0)$
lo que se cumple en I y C es curva regular. 0.3

b) De a) $\left\|\overrightarrow{r}'(t)\right\| = \sqrt{\frac{1+t}{4} + \frac{1-t}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1}$ y

$L(C) = \int\limits_{-1}^{1} 1dt = t|_{-1}^{1} = 2$ 0.4

c) De $\overrightarrow{r}'(t)$, $\overrightarrow{r}''(t) = \left(\frac{1}{4}\left(1+t\right)^{-1/2}, \frac{1}{4}(1-t)^{-1/2}, 0\right)$

y $\overrightarrow{r}'(t) \cdot \overrightarrow{r}''(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + 0 = 0$,
con lo cual $\overrightarrow{r}'(t)$ es perpendicular a $\overrightarrow{r}''(t)$, si $t \in I$, con $t \neq -1$ y $t \neq 1$

0.5

d) El punto $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ corresponde a $t = 0$; de a) y b)

$T(t) = \left(\frac{(1+t)^{1/2}}{2}, \frac{-(1-t)^{1/2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $T(0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

También de a) y c)
$\overrightarrow{r}'(0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overrightarrow{r}''(0) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$

$$\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''(0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right); \ \left\|\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}''(0)\right\| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

y $B(0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $N(0) = B(0) \times T(0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. 0.8

Pregunta 3

Una partícula en movimiento tiene una trayectoria dada por $\overrightarrow{r}(t) = (3\cos\alpha(t), 3sen\alpha(t), 1)$, en $\mathbb{R}^3$, $\forall\ t \geq 0$,

en que $\alpha = \alpha(t)$, es función lineal que se anula en $t = 0$

a) Verificar que la trayectoria es circular

b) Determinar $\alpha(t) > 0$ si la rapidez del movimiento es igual a 2.

c) Obtener la curvatura y la torsión de la trayectoria (justifique sus respuestas)

Solución.

a) Las componentes de $\overrightarrow{r}(t)$, $x(t) = 3\cos\alpha(t)$, $y(t) = 3sen\alpha(t)$, $z(t) = 1$, verifican

$x(t)^2 + y(t)^2 = 9(sen^2\alpha(t) + \cos^2\alpha(t)) = 9$, o sea

$x^2 + y^2 = 9$ y $z = 1$, C es circunferencia que está en un cilindro circular y en un plano.

0.5

b) Debe ser $\left\| \overrightarrow{r}'(t) \right\| = 2$ (rapidez), con lo cual de $\overrightarrow{r}'(t) = (-3\alpha'(t)sena(t), 3\alpha'(t)\cos\alpha(t), 0)$,

$\left\| \overrightarrow{r}'(t) \right\| = \sqrt{9\alpha'(t)^2 sen^2 a(t) + 9\alpha'(t)^2\cos^2\alpha(t)} = 2$

$\implies |3\alpha'(t)| = 2 \implies \alpha'(t) = \frac{2}{3} \implies \alpha(t) = \frac{2}{3}t + c$

y con $\alpha(0) = c = 0 \implies \alpha(t) = \frac{2}{3}t$ 0.7

c) De b) C es representada por $\overrightarrow{r}(t) = (3\cos\frac{2}{3}t, 3sen\frac{2}{3}t, 1)$ y se calculan $k(t)$, $\tau(t)$ con fórmulas que

consideran $\overrightarrow{r}'(t)$, $\overrightarrow{r}''(t)$, $\overrightarrow{r}'''(t)$. Esto es:

$\overrightarrow{r}'(t) = (-2sen\frac{2}{3}t, 2\cos\frac{2}{3}t, 0)$

$\overrightarrow{r}''(t) = (-\frac{4}{3}\cos\frac{2}{3}t, -\frac{4}{3}sen\frac{2}{3}t, 0)$

$\overrightarrow{r}'''(t) = (\frac{8}{9}sen\frac{2}{3}t, -\frac{8}{9}\cos\frac{2}{3}t, 0)$

$\overrightarrow{r}' \times \overrightarrow{r}'' = (0, 0, \frac{8}{3})$, y resultan $k = \frac{1}{3}$ y $\tau = 0$

Estos mismos valores resultan sin estos cálculos, considerando que C es circunferencia de radio $R = 3, k = \frac{1}{3}$ y C está en un plano y $\tau = 0$.

0.8