UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.
PES DE CÁLCULO AVANZADO
Primer Semestre 29/07/2010

NOMBRE...RUT.........................

PREGUNTA 1:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 & ,si \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & ,si \quad x > 1 \end{cases}$.

a) Obtener su integral de Fourier Senoidal (de senos)

b) Del resultado obtenido deducir la convergencia de:

$$\int_0^\infty \frac{senw}{w} dw$$

SOLUCIÓN:

La integral de Fourier es:

$$I_s(f(x)) = \int_0^\infty B(w) senwxdw$$

con: $B(w) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(v) senwvdv = \dfrac{2}{\pi}\int_0^1 senwvdv = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{-\cos wv}{w}\right)_0^1 =$
$\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1-\cos w}{w}$

así: $I_s(f(x)) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{1-\cos w}{w} senwxdw$

Considerando $x = 1$, punto en que f es discontinua con $f(1^-) = 1$, $f(1^+) = 0$, por teorema de convergencia.

$$I(1) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w} senwdw = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\infty \frac{senw}{w}dw - \int_0^\infty \frac{\cos w \ senw}{w}dw\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\infty \frac{senw}{w}dw - \int_0^\infty \frac{sen2w}{2w}dw\right) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\infty \frac{senw}{w}dw - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{senu}{u}du\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{senw}{w}dw \Rightarrow$$

$$= \int_0^\infty \frac{senw}{w}dw = \frac{\pi}{2}$$

PREGUNTA 2:
Verificar que el siguiente sistema:

$$x^2 + y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0$$
$$2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0$$

define funciones $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, **en la vecindad de** $P_0 = (2, -1)$ **tal que** $u(2, -1) = 2$, $v(2, -1) = 1$. **Obtener** $u_x(2, -1)$.

SOLUCIÓN:

a) $F(2, -1, 2, 1) = 4 - 1 - 8 + 1 + 4 = 0$
$G(2, -1, 2, 1) = -4 + 1 - 8 + 3 + 8 = 0$

b) $F_x = 2x$, $F_y = -2y$, $F_u = -3u^2$, $F_v = 2v$

$G_x = 2y$, $G_y = 2x$, $G_u = -4u$, $G_v = 12v^3$

Todas de clase $C^{(1)}$.

c) $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -3u^2 & 2v \\ -4u & 12v^3 \end{vmatrix} = -36u^2v^3 + 8uv$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_P = -128 \neq 0$$

Entonces el sistema determina funciones. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ diferenciables en $V(P_o)$ con derivada:

$$u_x(2, -1) = \frac{13}{32}$$

Obtenida en fórmula en cuociente entre jacobianos o bien derivando el sistema con respecto a x.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3u^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 2y - 4u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 12v^3\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left| \frac{\begin{matrix} -2x & 2v \\ -2y & 12v^3 \end{matrix}}{\begin{matrix} -3u^2 & 2v \\ -4u & 12v^3 \end{matrix}} \right| = \frac{4yv - 24xv^3}{8uv - 36u^2v^3} \Rightarrow$$

$$u_x(2, -1) = \frac{-4 - 24 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 2 \cdot 1 - 36 \cdot 4} = \frac{13}{32}$$

PREGUNTA 3:
Verificar el teorema de Green para el campo vectorial:

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{1+x^2+2y^2}, \frac{2y}{1+x^2+2y^2} \right)$$

en la región R, acotada por la curva C definida por: $x^2 + 2y^2 = 1$

SOLUCIÓN:

Verificar el teorema de Green para: $\vec{F} = \left(\frac{x}{1+x^2+2y^2}, \frac{2y}{1+x^2+2y^2} \right)$ y C definida por $x^2 + 2y^2 = 1$

El campo vectorial $\vec{F} \epsilon\ C^{(1)}$ y C es una curva regular cerrada (elipse con $a = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ que encierra dominio conexo D: $x^2 + 2y^2 \leq 1$

a) Para la integral curvilínea C parametrizada como $\vec{r}(t) = \left(\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} sent \right)$, $t\ \epsilon\ [0, 2\pi]$, $\vec{r}\,'(t) = \left(-sent, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right)$ determina:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t(-sent)}{2} + \frac{\cos t(sent)}{2} \right) dt = \int_0^{2\pi} 0dt = 0$$

b) Para la integral doble a D, $\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy$ se tiene:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{1+x^2+2y^2} \right) = \frac{-4xy}{(1+x^2+2y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{1+x^2+2y^2} \right) = \frac{-4xy}{(1+x^2+2y^2)^2}$$ y entonces:

$$\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 0dxdy = 0$$

Así queda verificado el teorema.

PREGUNTA 4:
Sea la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ **con** $z \geq 0$. **Determinar el trabajo del campo:**

$$\vec{F} = \left(x + y + z^2 e^{x-y}, -2x^2 - z^2 e^{x-y}, xy + 2ze^{x-y} \right)$$

a lo largo de la frontera de S.

SOLUCIÓN:

Se debe calcular: $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, con C: $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, sent, 0)$ siendo $\overrightarrow{F} \epsilon\ C^{(1)}$

Conviene aplicar el teorema de Stokes y así calcular $\iint_S \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} ds$,

con $\nabla \times \overrightarrow{F} = (x, -y, -4x-1)$, $\hat{n} = (x, y, z)$

así $\oint_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_S \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} ds$

$$= \iint_D \left(x^2 - y^2 - 4xz - z\right) senududv$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 v - sen^2 v\right) sen^2 u - 4\cos v senu \cos u - \cos u\right] senududv$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} \left(\cos^2 v - sen^2 v\right) sen^2 u - 4\cos v senu \cos u - \cos u\right] senudvdu$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} \left(\cos^2 v - sen^2 v\right) sen^2 u - 4\cos v senu \cos u - \cos u\right] senudvdu$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos u \cdot senudvdu = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen2udu = \frac{\pi}{2}(\cos^2 u)_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi$$

PREGUNTA 5:

Calcular el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{F} = (x, y, z)$ a través de la superficie cilíndrica determinada por $x^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, $0 \leq y \leq b$.

SOLUCIÓN:

Con cálculo directo de la integral de superficie (no cabe usar teorema de Green), parametrizando S como $\overrightarrow{r}(u, v) = (a\cos v, u, asenv)$ con $0 \leq v \leq \pi$, $0 \leq u \leq b$

se tiene vector normal a S: $\hat{n} = (a\cos v, 0, asenv)$ de

$\overrightarrow{r}_u = (0, 1, 0)$
$\overrightarrow{r}_v = (-asenv, 0, a\cos v)$
$\overrightarrow{F} = (x, y, z)$ con S es $\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(u, v)\right) = (a\cos v, u, asenv)$, y $\hat{n} = (\cos v, 0, senv)$

Así:

$$= \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_D (a\cos v, u, asenv) \circ (\cos v, 0, senv) adudv$$

$$= \iint_D a^2 dudv = \int_0^{\pi} \left(\left(\int_0^b a^2 du\right) dv\right) = \pi a^2 b$$