UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.
TERCERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO
Primer Semestre 23/06/2010

NOMBRE...RUT.......................

PREGUNTA 1:
Considerar el campo vectorial $\overrightarrow{F}$ **en** $\mathbb{R}^3$ **con** $\overrightarrow{F} = (\alpha(y)z,\ 2\beta(y)z,$

$\gamma(x) + y^2)$**, con** $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ **funciones reales.**

$a)$ **Determinar** $\alpha(y),\ \beta(y),\ \gamma(x)$ **diferenciables de modo que** $\overrightarrow{F}$ **sea un campo gradiente (conservativo).**

$b)$ **Obtener la función potencial de** $\overrightarrow{F}$**.**

$c)$ **Evaluar** $\int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ **si** C **es una curva definida por la intersección de las superficies** $z = 2 - x^2 - y^2$ **y** $z^2 = x^2 + y^2$**.**

SOLUCION:

$a)$ Tenemos que:

$P(x,y,z) = \alpha(y)z$, $Q(x,y,z) = 2\beta(y)z$, $R(x,y,z) = \gamma(x) + y^2$, luego se debe cumplir que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= 2y - 2\beta(y) = 0 \Longleftrightarrow \beta(y) = y \\
\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= \alpha(y) - \gamma^{'}(x) = 0 \Longleftrightarrow \alpha(y) = \gamma'(x) \\
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 - \alpha'(y)z = 0 \Longleftrightarrow 0 = \alpha'(y)z
\end{aligned}
$$

para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

....0.4 puntos

Si comparamos estos resultados tenemos:

$\alpha'(y) = 0$, es decir, $\alpha(y) = a$ constante, con esto $\gamma'(x) = a$, y por lo tanto $\gamma(x) = ax + b$ con b constante.

....0.3 puntos

Con esto: $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (az,\ 2yz,\ ax + b + y^2)$.

....0.1 puntos

$b)$ Buscamos $f(x,y,z)$ de modo que :

$$\begin{aligned}
(1)\ \frac{\partial f}{\partial x} &= P(x,y,z) = az \\
(2)\ \frac{\partial f}{\partial y} &= Q(x,y,z) = 2yz \\
(3)\ \frac{\partial f}{\partial z} &= R(x,y,z) = ax + b + y^2
\end{aligned}$$

Si integramos (1) con respecto a x obtenemos:

$$(4)\ f(x,y,z) = azx + g(y,z)$$

Ahora si derivamos (4) con respecto a y y comparamos con (2) se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = 2yz$$

De donde:

$$g(y,z) = y^2 z + h(z)$$

Y así:

$$(5)\ f(x,y,z) = azx + y^2 z + h(z)$$

....0.2 puntos

Derivando ahora (5) con respecto a z y comparando con (3):

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ax + y^2 + h'(z) = ax + b + y^2$$

....0.3 puntos

Luego:

$$h'(z) = b, \text{ luego } h(z) = bz + c$$

....0.2 puntos

Finalmente:

$$f(x,y,z) = azx + y^2 z + bz + c$$

....0.1 punto

c) Por ser la intersección de las dos superficies una *Curva Cerrada*, y $\overrightarrow{F}$ un *Campo Conservativo*, entonces $\int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$.

....0.4 puntos

PROBLEMA 2:

La región (dominio cerrado) R en $\mathbb{R}^3$ es limitada por las superficies $x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0,\ z = b,$ con a,b positivos y se encuentra dentro del campo eléctrico $\overrightarrow{E} = (x, y, z^2 - 1)$. Calcular el flujo de $\overrightarrow{E}$ a través de S contorno de R.

SOLUCIÓN:

El flujo de $\overrightarrow{E}$ a través de S es $\Phi = \iint\limits_S \overrightarrow{E} \circ \hat{n} da.$

Primer método: Utilizando el teorema de la divergencia:

$$\Phi = \iiint\limits_R \nabla \circ \overrightarrow{E} dv.$$

$\nabla \circ \overrightarrow{E} = 2 + 2z$

....0.6 puntos

NOTA: Se otorga el puntaje si se establece la relacion con el flujo. Si solo se indica el teorema de la divergencia se otorgan 0.3 puntos

y si no se indica ni el flujo ni el teorema de divergencia 0 puntos aunque el cálculo este correcto.

Se escribe la integral usando coordenadas cilíndricas:

$$\Phi = \iiint\limits_R \nabla \circ \overrightarrow{E} dv = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b 2(z+1) p dz dp d\theta$$

....0.7 puntos

NOTA: Si no incluye el Jacobiano o no se indican correctamente los límites de integración se otorga a lo más 0.4 puntos

Finalmente, si lo anterior esta correcto, se revisa el cálculo.

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b 2(z+1) p dz dp d\theta \\
&= 2 \cdot 2\pi \int_0^a p(b + \frac{b^2}{2}) dp \\
&= 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot (b + \frac{b^2}{2}) \\
&= 2\pi a^2 (b + \frac{b^2}{2})
\end{aligned}$$

....0.7 puntos

NOTA: Si hay algún error de transcripción se otorga a lo más 0.5 puntos y si hay error de cálculo no se otorga puntaje

Segundo Método: Se calcula directamente usando la definición de flujo. Se divide la superficie S en tres partes: S1 es la base del cilindro, S2 es el manto del cilindro y S3 es la tapa del cilindro.

Entonces:

$$\Phi = \iint\limits_{S} \vec{E} \circ \hat{n} da = \iint\limits_{S1} \vec{E} \circ \hat{n} da + \iint\limits_{S2} \vec{E} \circ \hat{n} da + \iint\limits_{S3} \vec{E} \circ \hat{n} da$$

En estas expresiones $\hat{n}$ indica la normal unitaria hacia el exterior de la región y da indica el elemento infinitesimal de área de la respectiva superficie.

(i) La normal $\hat{n}$ a S1 es $\hat{n} = (0,0,-1)$ y $z = 0$. Por lo tanto:

$$\iint\limits_{S1} \vec{E} \circ \hat{n} da = \iint\limits_{S1} (x,y,-1) \circ (0,0,-1) da = \iint\limits_{S1} da = \pi a^2$$

ya que S1 es el circulo de radio a.

....0.6 puntos

(ii) Se parametriza el manto del cilindro usando θ y z. La normal $\hat{n}$ a S2 es $\hat{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ y el elemento de área es $da = adzd\theta$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{S2} \vec{E} \circ \hat{n} da &= \iint\limits_{S2} (a\cos\theta, a\sin\theta, z^2-1) \circ (\cos\theta, \sin\theta, 0) da \\ &= a \iint\limits_{S2} da \\ &= a \int_0^{2\pi} \int_0^b adzd\theta \\ &= 2\pi b a^2 \end{aligned}$$

....0.8 puntos

(iii) La normal $\hat{n}$ a S3 es $\hat{n} = (0,0,1)$ y $z = b$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S3} \overrightarrow{E} \circ \hat{n} da &= \iint\limits_{S3} (x, y, b^2 - 1) \circ (0, 0, 1) da \\ &= \iint\limits_{S3} (b^2 - 1) da \\ &= \pi a^2 (b^2 - 1)\end{aligned}$$

ya que S3 es el círculo de radio a.
....0.6 puntos

Sumando los tres resultados se obtiene:

$$\Phi = \iint\limits_{S} \overrightarrow{E} \circ \hat{n} da = \pi a^2 + 2\pi b a^2 + \pi a^2 (b^2 - 1) = 2\pi b a^2 (1 + \frac{b}{2})$$

NOTA: Para otorgar los puntajes se requiere indicar claramente la superficie, la normal unitaria y el elemento de área. Si hay algún error de transcripción se disminuye en 0.2 puntos y si hay error de cálculo no se otorga puntaje.

PROBLEMA 3:
Mediante el teorema de Stokes resolver la integral:

$$\int_C (z + yz)dx + (x + xz)dy + (y + xy)dz$$

Si C es el triángulo de vértices (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1).

SOLUCIÓN:

Como $\overrightarrow{F} \epsilon\ C^{(1)}$ y $C = C1$ U $C2$ U $C3$ contorno de superficie plana:

$$S : x + y + z - 1 = 0$$

Con teorema de Stokes:

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot dr = \iint_S \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} ds$$

....0.4 puntos

El vector $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \qquad (\hat{n} \cdot \hat{k} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0)$

....0.4 puntos

$\nabla \times \overrightarrow{F} = (1,1,1); \qquad ds = \sqrt{3}dxdy$

....0.4 puntos

Entonces:

$$\iint_S \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_D \frac{3}{\sqrt{3}} \sqrt{3} dxdy$$

....0.4 puntos

Siendo D triángulo en plano xy de vértices (0,0); (1,0); (0,1) y

$$3 \iint_D dxdy = \frac{3}{2}$$

....0.4 puntos