UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.
SEGUNDA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO
Segundo Semestre 29/10/2010
NOMBRE...RUT........................

PROBLEMA 1:

Sea la función $f(x,y) = \begin{cases} xysen\dfrac{1}{y} & si \quad y \neq 0 \\ 0 & si \quad \forall(x,0) \end{cases}$,

a) Estudiar la continuidad de f **en** $\Re^2$
b) Estudiar la existencia de las derivadas parciales en $\Re^2$
c) Estudiar si la función es diferenciable en $(0,0)$

SOLUCIÓN:

a) En primer lugar, para (x,y) con $y \neq 0$ se tiene que $f(x,y) = xysen\dfrac{1}{y}$ es continua al ser producto de funciones continuas y no anularse el denominador $\dfrac{1}{y}$.

....0.2

En segundo lugar, para $\forall(x,0)$, existe $f(x,0) = 0$

Evaluemos el límite de f tomando un punto generico $(a,0)$ sobre el eje x.

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(a,y) = \lim\limits_{y\to 0} aysen\dfrac{1}{y} = 0$, ya que $\left|sen\dfrac{1}{y}\right| \leq 1$

luego, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(a,y) = 0 = f(a,0)$
....0.3

Así la función f es continua sobre el eje x, en particular para $(0,0)$, lo que implica que la función es continua en $\Re^2$.

....0.2

b) Estudiemos las derivadas parciales para (x,y) con $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ysen\frac{1}{y}; \frac{\partial f}{\partial y} = xsen\frac{1}{y} - \frac{x}{y}\cos\frac{1}{y}$$
....0.2

Consideremos las derivadas parciales en los puntos del eje x , con $x \neq 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{xhsen\frac{1}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} xsen\frac{1}{h}$$

....0.3

Este último límite no existe, luego f no tiene derivada con respecto a y. Consideremos ahora las derivadas parciales en el punto $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0hsen\frac{1}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

Luego f tiene derivadas parciales en el punto $(0,0)$.

....0.2

c) Se determinó en el anteriormente que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ y ambas valen cero.Luego hay que estudiar el valor del límite:

$$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hksen\frac{1}{h}-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Evaluemos este límite usando coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)(rsen\theta)\left(sen\frac{1}{rsen\theta}\right)}{r} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta sen\theta sen\frac{1}{rsen\theta} = 0,$$

ya que la función $\left|\cos\theta sen\theta sen\frac{1}{rsen\theta}\right| \leq 1\forall(r,\theta)$.

Por tanto, la función f es diferenciable en $(0,0)$.

....0.6

PROBLEMA 2:

Sean $u(x,y), v(x,y)$ funciones de clase $C^{(2)}$, o sea, que tienen derivadas parciales de orden 2 continuas en $D \subseteq \mathbb{R}^2$, que verifican.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

a) Probar que $\nabla u(x,y)$ y $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ son perpendiculares entre si.

b) Probar que $u(x,y)$ y $\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ son soluciones de la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(u y v se llaman funciones armónicas).

c) Probar que $w(x,y) = u(x,y)v(x,y)$ también es función armónica.

SOLUCIÓN:

a) $\nabla u \circ \nabla v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \circ \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ y $\nabla u \perp \nabla v$

....0.4

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$; como v $\epsilon C^{(2)}$ entonces $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

y la suma $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$,

$u(x,y)$ es solución de la ecuación de Laplace.

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ y siendo $u \ \epsilon \ C^{(2)}$

se cumple $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ y así $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

....0.6

c)

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}v+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

De lo anterior la suma:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)v+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)u+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

Osea $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ y $w(x,y)$ es una función armónica.

....1.0

PROBLEMA 3:

Dado un rectangulo de perímetro 4p, en cada uno de los lados se dibujan, exteriormente, semicirculos que tienen diámetros iguales a las magnitudes de los lados . Determinar la longitud de cada lado del rectangulo de manera que la suma de las áreas de los semicírculos sea mínima.

SOLUCION:

Sean x, y los lados del rectangulo con: $2x+2y=4p$, áreas $A_1=\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$, $A_2=\frac{\pi}{4}y^2$

Se tiene entonces $A(x,y)=f(x,y)=\frac{\pi}{4}\left(x^2+y^2\right)$

con condición $x+y-2p=0$

....0.7

Para C.N. consideramos función:

$$L(x,y,\lambda)=\frac{\pi}{4}\left(x^2+y^2\right)+\lambda\left(x+y-2p\right)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} L_x=\frac{\pi}{2}x+\lambda=0 \\ L_y=\frac{\pi}{2}y+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y-2p=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\lambda=-\frac{\pi}{2}x=-\frac{\pi}{2}y\Rightarrow x=y\Rightarrow$$

$2x=2p\Rightarrow x=y=p$

y así $P_0 = (p, p)$ es punto crítico del problema

....0.7

De $f(x,y) = \frac{\pi}{4}\left(x^2 + y^2\right)$ y condición resulta $F(x, y(x))$ con $F'(x, y(x)) = \frac{\pi}{4}\left(2x + 2yy'(x)\right)$

con $y'(x) = -1$; $F'(x, y(x)) = \frac{\pi}{4}\left(2x - 2y\right) = \frac{\pi}{2}\left(x - y\right)$ y

$F''(x, y(x)) = \frac{\pi}{2}\left(1 - y'(x)\right) = \pi > 0$. Así

$f(p,p) = \frac{\pi}{4}\left(2p^2\right) = \frac{\pi}{2}p^2$ es valor mínimo de f

....0.7