UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.
PRIMERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO
Segundo Semestre 24/09/2010
NOMBRE...RUT.......................

PREGUNTA 1:
Dada $f(x) = senx$, con $x \epsilon [0,\pi]$ y su serie de Fourier en cosenos.

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$$

determinar las convergencias de las series:

$a)$ $\dfrac{1}{2^2-1} + \dfrac{1}{4^2-1} + \dfrac{1}{6^2-1} + ... + \dfrac{1}{4n^2-1} + ...$

$b)$ $\dfrac{1}{2^2-1} - \dfrac{1}{4^2-1} + \dfrac{1}{6^2-1} - ...... + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{4n^2-1} + ...$

$c)$ $\dfrac{1}{1^2 3^2} + \dfrac{1}{3^2 5^2} + \dfrac{1}{5^2 7^2} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + ...$

SOLUCION:

1) Como la función f(x)=senx y sus extensiones par y periódica son continuas $\forall x$ entonces su serie de Fourier es convergente a $f(x) = senx \ \forall x$ (puntual) así:

a) En $X_0 = 0$ ocurre $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 0 = f(0) = 0$ y de aquí

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + ... + \frac{1}{4n^2-1} + ...\right) = 0 \text{ y}$$

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + ... + \frac{1}{4n^2-1} + ... = \frac{1}{2}$$

b) En $X_1 = \dfrac{\pi}{2}$ocurre $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos n\pi = f(\frac{\pi}{2}) = 1$ que implica con $\cos n\pi = (-1)^n$, la convergencia

$$\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - ...... + (-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1} + ... = \frac{\pi-2}{4}$$

c) Con identidad de Parseval $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2dx = 2\left(a_0\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ se obtiene

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} senx^2dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi} = 1 = 2\cdot\frac{4}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2} \Rightarrow$$

La convergencia:

$$\frac{1}{1^2 3^2} + \frac{1}{3^2 5^2} + \frac{1}{5^2 7^2} + ... + \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + ... = \frac{\pi^2-8}{16}$$

PREGUNTA 2:

Un movil parte del origen recorriendo la trayectoria $\vec{r}(t) = \left(t^2\cos t, t^2 sent, \frac{t^3}{\sqrt{3}}\right)$ con $t \geq 0$.

a) Hasta el instante t_1 ha recorrido una longitud de arco de $\frac{14}{3}$ unidades. ¿A que altura respecto del plano XY se encuentra el movil en este instante t_1?

b) Obtener el vector velocidad y su rapidez en $P = \vec{r}(\frac{\pi}{2})$.

c) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva descrita por $\vec{r}(t)$ en P y el punto Q en el cuál esta tangente intersecta el plano XY.

SOLUCIÓN:

De $\vec{r}(t) = \left(t^2\cos t, t^2 sent, \frac{t^3}{\sqrt{3}}\right)$, $t \geq 0$. se tiene $\vec{r}\,'(t) = \left(2t\cos t - t^2 sent, 2tsent + t^2\cos t, \frac{3t^2}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| = \left(\left(2t\cos t - t^2 sent\right)^2 + \left(2tsent + t^2\cos t\right)^2 + 3t^4\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(4t^2 + t^4 + 3t^4\right)^{\frac{1}{2}} = 2t(1+t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$s(t) = \int_0^t 2t(1+t^2)^{\frac{1}{2}}dt = \left[(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\tfrac{2}{3}\right]_0^t = \tfrac{2}{3}\left[(1+t^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

con $s(t_1) = \frac{14}{3}$, se tiene $\frac{2}{3}\left[(1+t^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{14}{3} \Rightarrow (1+t^2)^{\frac{3}{2}} = 8 = 2^3 \Rightarrow 1 + \left(t1\right)^2 = 4 \Rightarrow$

$$t_1 = \sqrt{3}$$

La altura es $z(\sqrt{3})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^3=3$

El vector tangente unitario es:

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left\|\overrightarrow{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\|}=\frac{\left(\frac{-\pi^2}{4},\pi,\frac{3\pi^2}{\sqrt{3}4}\right)}{\pi\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\left(\frac{-\pi}{4},1,\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right)}{\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^{\frac{1}{2}}};\ \overrightarrow{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{-\pi}{4},1,\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right);$$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$$

La ecuación de la recta tangente : $\overrightarrow{a}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(0,\dfrac{\pi^2}{4},\dfrac{\pi^3}{8\sqrt{3}}\right)$

es $\overrightarrow{R}(\lambda)=\left(0,\dfrac{\pi^2}{4},\dfrac{\pi^3}{8\sqrt{3}}\right)+\lambda\left(\dfrac{-\pi}{4},1,\dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{-\pi\lambda}{4},\dfrac{\pi^2}{4}+\lambda,\dfrac{\pi^3}{8\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}\pi\lambda}{4}\right)$

esta recta intersecta al plano XY si $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}+\dfrac{\sqrt{3}\pi\lambda}{4}=0\Rightarrow$

$$\lambda=-\frac{\frac{\sqrt{3}\pi}{24}}{\frac{\sqrt{3}\pi}{4}}=-\frac{1}{6}$$

y

$$Q=\left(-\frac{\pi}{24},\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{6},0\right)$$

PROBLEMA 3:
Para la curva C definida por $\overrightarrow{r}(t)=(a\cos t,bsent,0)$ **con** $t\ \epsilon\ [0,2\pi]$ y a,b **constantes positivas** $a>b$, **determinar:**

a) Su curvatura $k(t)$.
b) Los puntos de C en que $k(t)$.**es maxima o minima.**

SOLUCIÓN:

De $\overrightarrow{r}(t)=(a\cos t,bsent,0)$, $\overrightarrow{r}'(t)=(-asent,b\cos t,0)$, $\overrightarrow{r}''(t)=(-a\cos t,-bsent,0)$;

$\overrightarrow{r}'(t)\times\overrightarrow{r}''(t)=(0,0,ab)$

$\left\|\overrightarrow{r}'(t)\right\|=\left((-asent)^2+(b\cos t)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^2sen^2t+b^2(1-sen^2t)\right)^{\frac{1}{2}}=\left((a^2-b^2)sen^2t+b^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\left\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\right\| = \left(a^2b^2\right)^{\frac{1}{2}} = |a|\,|b| = ab$$

Con fórmula $k(t) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)\right\|}{\left\|\overrightarrow{r}'(t)\right\|^3}$, resulta:

a) $k(t) = \dfrac{ab}{((a^2-b^2)sen^2t+b^2)^{\frac{1}{2}}}$,$\forall t \ \epsilon \ [0, 2\pi]$

b) $k(t)$ es máximo o mínimo según que $g(t) = (a^2-b^2)sen^2t+b^2$ sea mínimo o máximo; los respectivos valores se obtienen (máximos o mínimos de $k(t)$,

surgen de $g'(t) = 2(a^2-b^2)sent\cos t = (a^2-b^2)sen2t$ que tiene puntos críticos en:

$t_1 = 0, t_2 = \pi, t_3 = \frac{\pi}{2}, t_4 = \frac{3\pi}{2}$. Con $g''(t) = 2(a^2-b^2)\cos 2t$ resultan de $g''(0) > 0$,

$g(0) = b^2$ y $k(0) = \dfrac{ab}{b^3} = \dfrac{a}{b^2}$, valor máximo de k en $P_1 = (a, 0, 0)$;

de $g''(\pi) > 0, g(\pi) = b^2, k(\pi) = \dfrac{a}{b^2}$, valor máximo de k en $P_2 = (-a, 0, 0)$

de $g''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0, g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a^2, k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{ab}{a^3} = \dfrac{b}{a^2}$, valor mínimo de

k en $P_3 = (0, b, 0)$

de $g''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) < 0, g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = a^2, k\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{ab}{a^3} = \dfrac{b}{a^2}$, valor mínimo

en $P_4 = (0, -b, 0)$