UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO MATEMATICA Y C.C.

PES DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Segundo Semestre 2010
(16/12/2010)

Problema 1:

Establecer que se cumple:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w} senwxdw = \begin{cases} 1, & si \quad 0 < x \le 1 \\ 0, & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Estudiar convergencia en x=1 y deducir el valor $\int_0^\infty \frac{senw}{w}dw$

Solución:

Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & si \quad 0 < x \le 1 \\ 0, & si \quad x > 1 \end{cases}$ según lo pedido corresponde obtener la integral de Fourier seno.

Entonces $A(w)=0,\ B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)senwvdv$. Para la función $f(x)$ dada

$B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)senwvdv = \frac{2}{\pi}\int_0^1 senwvdv = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos wv}{w}\right)_0^1 = \frac{2}{\pi}\frac{1-\cos w}{w}$. La integral seno es:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w} senwxdx$$

Como $f(x)$ es seccionalmente continua entonces se tiene convergencia puntual; en particular en x=1 se tiene.

$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos w}{w} senwxdx = \frac{1}{2}$, De esto

$$\int_0^\infty \frac{senw}{w}dw - \int_0^\infty \frac{senw\cos w}{w}dw = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{senw}{w}dw - \int_0^\infty \frac{sen2w}{2w}dw = \int_0^\infty \frac{senw}{w}dw - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{senw}{w}dw = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{senw}{w} dw = \frac{\pi}{4} \quad \text{y}$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{senw}{w} dw = \frac{\pi}{2}}$$

Problema 2:

Verificar que la ecuación $F(x,y,z) = x^2 + yz + z^3 = 0$ en el punto $P_0 = (1,0,-1)$ define z como función de x e y en la vecindad $V((1,0),\delta)$. Obtener las derivadas parciales z_x, z_y en $V((1,0),\delta)$.
Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $z = z(x,y)$ en $P_0 = (1,0,-1)$

Solución:

La función $F(x,y,z) = x^2 + yz + z^3$ cumple las condiciones:

a) F es de clase $C^{(1)}$ por ser continua con $F_x = 2x, F_y = z, F_z = y + 3z^2$ también continuas (potencias en las variables)
b) $F(1,0,-1) = 1 + 0 - 1 = 0$
c) $F_z(1,0,-1) = -1 \neq 0$. Entonces F=0, define $z = z(x,y)$ diferenciable con $z(1,0) = -1$; derivadas z_x, z_y en $V((1,0),\delta)$ dadas por:

$$z_x = -\frac{2x}{y + 3z^2}, \qquad z_y = -\frac{z}{y + 3z^2}$$

En particular en $P_0 = (1,0,-1)$,

$$z_x(P_0) = -\frac{2}{3}, \qquad z_y(P_0) = \frac{1}{3}$$

Con lo precedente resulta la ecuación de plano tangente a S definido por $z = z(x,y)$ en $P_0 = (1,0,-1)$. $z + 1 = \frac{-2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}y$ equivalente a:

$$\boxed{2x - y + 3z + 1 = 0}$$

Problema 3:

Resolver $I=\int_C \frac{2x}{1+2x^2+y^2}dx+\frac{y}{1+2x^2+y^2}dy$ **, si C es la curva dad por:**

a) $x=y^2$, **entre (0,0) y (1,1)**

b) $2x^2+y^2=1$

Solución:

Es integral curvilínea en $\Re^2$ con:

$$f(x,y)=\frac{2x}{1+2x^2+y^2}, \qquad g(x,y)=\frac{y}{1+2x^2+y^2},$$

Ambas de clase $C^{(1)}$ con,

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x(-2y)}{\left(1+2x^2+y^2\right)^2}$, $\quad \frac{\partial g}{\partial x}=\frac{y(-4x)}{\left(1+2x^2+y^2\right)^2}$, iguales. Así $\vec{F}(f(x,y),g(x,y))$ es

campo gradiente e I es independiente de la curva C entre puntos A y B.

Tiene potencial $\phi(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(1+2x^2+y^2\right)$. Así, resultan en:

a) $I=\phi(1,1)-\phi(0,0)=\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 1)\Rightarrow$

$$\boxed{I=\int_C \frac{2x}{1+2x^2+y^2}dx+\frac{y}{1+2x^2+y^2}dy=\ln 2}$$

b) C es una elipse, curva regular cerrada, por lo tanto:

$$\boxed{I=\int_C \frac{2x}{1+2x^2+y^2}dx+\frac{y}{1+2x^2+y^2}dy=0}$$

Problema 4:

Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$, siendo $\vec{r} = (x, y, z)$ y $r = \left\|\vec{r}\right\|$ a través de la superficie esférica centrada en (0,0,0) y radio a. Explicar porque no es aplicable calcular este flujo mediante el teorema de Gauss.

Solución:

La integral es $I = \iint_S \vec{F}\,\hat{n}\,ds = \iint_S \dfrac{\vec{r}}{r^3}\dfrac{\vec{r}}{r}ds = \iint_S \dfrac{r^2}{r^3 r}ds = \iint_S \dfrac{1}{r^2}ds$, con S esfera

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ esto es, $r^2 = a^2$. Así $I = \dfrac{1}{a^2}\iint_S ds = \dfrac{1}{a^2}A(s)$.

$A(s) = 4\pi a^2$, área de S y la integral es:

$$\boxed{I = \frac{1}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi}$$

El teorema de Gauss no es aplicable por ser $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ discontinuo en (0,0,0) que pertenece al interior de S.

Problema 5:

Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F}=(-2y,2x,z)$ y la superficie S dada por $z=2-x^2-y^2$ con $z\geq 1$.

Solución:

$\vec{F}=(-2y,2x,z)$ Es campo vectorial de clase $C^{(1)}$, S es superficie regular en paraboloide circular comprendida entre $z=1,\ \ z=2$ y de ecuación $z=2-x^2-y^2$.

a) La curva C contorno de S es $x^2+y^2=1,\ \ z=1$ y parametrizada $\vec{r}(t)=(\cos t, sent, 1)$ da $\vec{r}\,'(t)=(-sent,\cos t,0)$ con $t\in[0,2\pi]$

$$\oint_C \vec{F}\,d\vec{r}=\int_0^{2\pi}(-2sent,2\cos t,1)\circ(-sent,\cos t,0)dt=\int_0^{2\pi}\left(2sen^2 t+2\cos^2 t\right)dt=\int_0^{2\pi}2dt\Rightarrow$$

$$\boxed{\oint_C \vec{F}\,d\vec{r}=4\pi}$$

b) El rotacional de $\vec{F}=(-2y,2x,z)$ es $\nabla\times\vec{F}=(0,0,4)$; S parametrizada como $\vec{r}(x,y)=(x,y,2-x^2-y^2)$ tiene $\vec{r}_x=(1,0,-2x)$, $\vec{r}_y=(0,1,-2y)$ y $\vec{r}_x\times\vec{r}_y=(2x,2y,1)$ y

$$\boxed{\iint_S \nabla\times\vec{F}\,\hat{n}\,ds=\iint_D 4dxdy=4\pi}$$