UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO MATEMATICA Y C.C.

PES DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Primer Semestre 2009
(10/07/2009)

Problema 1:

Sea C una curva definida por la intersección de las superficies $x^2+y^2+z^2=1,\ \ x^2-y+y^2=0$

a) Parametrizar la curva C en su forma vectorial $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),$ $t\in[a,b]$.

b) obtener los vectores unitarios $\hat{T};\hat{B}\ \ en\ \ \vec{P_o}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$**.**

Solución:

a) Es definida C como la curva común a superficies $x^2+y^2+z^2=1,$ $x^2-y+y^2=0$**,** equivalente a $x^2+y^2+z^2=1,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}$**,** es elegido t tal que $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos t,\ \ y=\frac{1}{2}sent,\ \ z(t)=\sqrt{1-\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^2-\frac{1}{4}sen^2t}$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{\cos t}{2}-\frac{\cos^2 t}{4}-\frac{sen^2t}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos t)}=sen\frac{t}{2}$$

y $\vec{r}(t)=\left(\frac{1+\cos t}{2},\frac{sent}{2},sen\frac{t}{2}\right),\ \ t\in[0,2\pi]\ ,\ P_0=\vec{r}(t_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow t_0=\frac{\pi}{2}$

b) Con $\vec{r}\,'(t)=\left(\frac{-sent}{2},\frac{\cos t}{2},\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right),\ \ \vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

y $T\left(\pi/2\right)=\dfrac{\left(\frac{-1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{\sqrt{1/4+1/3}}=\dfrac{\left(\frac{-1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{\sqrt{3}/2\sqrt{2}}=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\vec{r}''(t)=\left(\frac{-\cos t}{2},\frac{-sent}{2},\frac{-1}{4}sen\frac{t}{2}\right);\quad \vec{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(0,\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{2}}{8}\right)$$

$$\hat{B}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\times\vec{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left\|\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\times\vec{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\|}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{8},-\frac{\sqrt{2}}{16},\frac{1}{4}\right)}{\frac{\sqrt{26}}{16}}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{26}},\frac{4}{\sqrt{26}}\right)$$

Problema 2:

Determinar un punto P1 en la superficie $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-1=0$ **y otro punto P2 en el plano** $x+y+z-12=0,$ **tal que la distancia entre P1 y P2 sea mínima.**

Solución:

Con distancia de P1 al plano $d=\frac{x+y+z-12}{\sqrt{3}}$ con P1 que verifica:

$g=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-1=0$, usando función de Lagrange

$L(x,y,z,\lambda)=d+\lambda\cdot g=\frac{x+y+z-12}{\sqrt{3}}+\lambda\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-1\right)$ del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} L_x=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\lambda\cdot x=0 \\ L_y=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\lambda\cdot y=0 \\ L_z=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{9}\lambda\cdot z=0 \\ L_z=\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-1\right)=0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x=-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\lambda} \\ y=-\frac{2}{\sqrt{3\cdot\lambda}} \\ z=\frac{-3\sqrt{3}}{2\cdot\lambda} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\pm\frac{3}{4} \\ y=\pm 1 \\ z=\pm\frac{9}{4} \end{array}$$

Consideraremos $P1=\left(\frac{3}{4},1,\frac{9}{4}\right)$ (de primer octante), el segundo punto P2 esta en la recta $\vec{r}=P1+t(1,1,1)$ y como debe estar en el plano $x+y+z-12=0$ se tiene $\frac{3}{4}+t+1+t+\frac{9}{4}+t=12\Rightarrow t=\frac{8}{3}$ y $P2=\left(\frac{41}{12},\frac{44}{12},\frac{59}{12}\right)$

Problema 3:

Calcular el área de la región de $\Re^2$ limitada por las curvas: $x^2 + 2y^2 = 1$**,** $x^2 + 2y^2 = 4,\ \ y = 2x\ \ , y = 5x$

Solución:

$$A(R) = \iint_D dxdy = \iint_{R'} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv, \quad con \quad R' : 1 \le u \le 4, \quad 2 \le v \le 5$$

Y jacobiano $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{J'}$ $\quad J' = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ siendo $J' = \begin{vmatrix} 2x & 4y \\ \dfrac{-y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 + 4\dfrac{y^2}{x^2} = 2(1+2v^2)$

$$A(R) = \iint_{R'} \frac{1}{2(1+2v^2)} dudv = \frac{1}{2}\int_1^4 \left(\int_2^5 \frac{dv}{1+2v^2} \right) du = \frac{3}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Problema 4:

Sea C una curva que une un punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con otro punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, con $0 < a < b$ y sea $\vec{F} = r\,\vec{r}$ siendo $\vec{r} = (x,y,z);\ \ r = \left\| \vec{r} \right\|$**. Obtener el valor de $\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$.**

Solución:

El campo vectorial $\vec{F} = r\,\vec{r} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}(x,y,z) = (f,g,h)$ es campo gradiente ya que $\vec{F} \in C^{(1)}$, verifica:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= x\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} 2y = xy\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= y\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} 2x = xy\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} \end{aligned}\right\} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = yz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = \frac{\partial h}{\partial y}; \quad \frac{\partial h}{\partial x} = xz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Un dominio que no incluye al origen, como ocurre en es este caso tiene potencial $\phi(x,y,z) = \dfrac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}$, esta integral es independiente de C y su valor es: $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \frac{1}{3}\left(b^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$

Problema 5:

Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\vec{F} = (-5y, 5x, z)$ **y la superficie** $S:\ z = 1$ **interior a la superficie** $z = 5 - x^2 - y^2$

Solución:

Se tiene superficie S: $x^2 + y^2 \le 4,\ \ z = 1$ y curva C cerrada $x^2 + y^2 = 4,\ \ z = 1$;
$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (-5y, 5x, z) = (0,0,10),\ \ \hat{n} = (0,0,1)$ con lo cual:

a) Con C: $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2sent, 1),\ \ t \in [0, 2\pi]$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-10sent, 10\cos t, 1) \cdot (-2sent, 2\cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} (20sen^2 t + 20\cos^2 t) dt = 40\pi$$

b) $I = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = \iint_S (0,0,10)(0,0,1) ds = \iint_D 10 dxdy$

$D:\ \ x^2 + y^2 \le 4; \Rightarrow I = 10 \cdot \pi \cdot 4 = 40\pi$