UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO MATEMATICA Y C.C.

PRIMERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Primer Semestre 2009
(24/04/2009)

Problema 1.

Sea $f(x)=1+|x|, x\in[-1,1]$, **periódica de periodo 2. Determinar:**

a) **Su serie de Fourier.**

b) **La convergencia de la serie** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

c) **La convergencia de** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

Solución:

$f(x)=1+|x|, x\in[-1,1]$, es función par, p=1; entonces $b_n=0; a_0=2\int_0^1(1+x)dx=3$;

$$a_n=2\int_0^1(1+x)\cos(n\pi x)dx=2\int_0^1\cos(n\pi x)dx+2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx$$

$$=2\frac{sen(n\pi x)}{n\pi x}\Big|_0^1+2\left\{\frac{xsen(n\pi x)}{n\pi x}\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1 sen(n\pi x)dx\right\}=\left\{\frac{2}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x)\Big|_0^1=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)$$

$$=\begin{cases}0;\text{Si n es par}\\ \frac{-4}{n^2\pi^2};\text{Si n es impar}\end{cases}$$

a) Con cambio de notación se obtiene serie de Fourier:

$$\boxed{f(x)=\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}}$$ 1 pto.

b) Considerando valor de $x_0=0$, en el cual f es continua; además y =f(x) es continua $\forall x$ se obtiene por teorema de convergencia puntual.

$$\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=f(0)=1\Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$$ 0.5 pto.

c) Con identidad de Parseval se tiene:

$$2\int_0^1 (1+x)^2\,dx = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left.\frac{2(1+x)^3}{3}\right|_0^1 dx = \frac{9}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^4(2n-1)^4} \Rightarrow$$

$$\frac{14}{3}-\frac{9}{2}=\frac{1}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^4(2n-1)^4} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}}$$ 0.5 pto.

Problema 2.

Sea C una curva dada por $\vec{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3), t \in \Re$

a) Verificar que C es regular.

b) Calcular la longitud de segmento de C comprendido entre sus puntos A=(0,0,0) y B=(2,3,4)

c) Calcular $\dfrac{\kappa(t)}{\tau(t)}, t \in \Re$

d) Determinar los puntos de C en que la curvatura K sea máxima y puntos en que K sea mínima.

Solución:

De $\vec{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3), t \in \Re$

a) $\vec{r}'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) \neq 0 \Rightarrow$ es continua y es curva regular. 0.2 pto

$\vec{r}''(t) = (-6t, 6, 6t)$

$\vec{r}'''(t) = (-6, 0, 6)$

b) $\left\| \vec{r}'(t) \right\| = 3\sqrt{2}(1+t) \Rightarrow L = \int_0^1 3\sqrt{2}(1+t^2)dt = 4\sqrt{2}$ 0.3 pto.

c)

$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = 18(t^2 - 1, -2t, t^2 + 1)$

$\left\| \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \right\| = 18\sqrt{2}(t^2 + 1)$

$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \bullet \vec{r}'''(t) = 18 \cdot 12 = 216$

0.5 pto.

Con las fórmulas correspondientes resultan:

$$\kappa(t) = \frac{\left\| \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|^3} = \frac{18\sqrt{2}(t^2+1)}{(3\sqrt{2})^3(1+t)^3} = \frac{1}{3(1+t^2)^2}; \forall t$$

$$\tau(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \bullet \vec{r}'''(t)}{\left\| \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \right\|^2} = \frac{18 \cdot 12}{18^2 \cdot 2(1+t^2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

Y el valor:

$$\boxed{\frac{\kappa(t)}{\tau(t)} = 1; \forall t}$$ 0.5 pto.

d)

$$\kappa(t) = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

Es valor máximo si $(1+t^2)$ es mínimo y esto ocurre con t=0$\Rightarrow$Po= (0,0,0) con K(0)=1/3 valor máximo;

Mínimo ocurre cuando $t \to \infty$ en cuyo caso $\kappa(t) \to 0$ 0.5 pto.

Problema 3:

Determinar una función $z=z(t), t\in[0,2\pi]$, derivable de orden 2, de modo que los vectores normales a la curva $\vec{r}'(t)=(t, sent, z(t))$, sean paralelos al plano YZ obtenido $z=z(t)$ verificar que $\vec{r}'(t)\, y\, \vec{r}''(t)$ son perpendiculares.

Solución:

Como los vectores normales $\vec{n}=(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))\times\vec{r}'(t)$ deben ser paralelos al plano yz entonces $\vec{n}$ debe ser perpendicular al eje x; así se cumple $\vec{n}\circ(1,0,0)=0$

0.5 pto.

Calculamos:

$\vec{r}'(t)=(1,\cos t, z'(t))$

$\vec{r}''(t)=(0,-\sin t, z''(t))$

Lo que determina: $\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=(z''(t)\cos t+z'(t)sent, -z''(t), -\sin t)$

Y $\vec{n}=(-z''(t)z'(t)+sent\cos t, n_2, n_3)$ que implica:

$\vec{n}\circ(1,0,0)=-z''(t)z'(t)+sent\cos t=0$ (no se requieren los valores de n_2, n_3)

0.5 pto.

Así: $z''(t)z'(t)=sent\cos t \Rightarrow \dfrac{(z'(t))^2}{2}=\dfrac{sen^2 t}{2}$

$\Rightarrow z'(t)=sent$ (una solución posible)$\Rightarrow z(t)=-\cos t$ de esta manera

$\vec{r}(t)=(t, sent, -\cos t)$ cumple lo requerido 0.5 pto.

Para este $\vec{r}(t), \vec{r}'(t)=(t, sent, -\cos t), \vec{r}''(t)=(0,-sent,\cos t)\, y\, \vec{r}'(t)\circ\vec{r}''(t)=0$

Con lo cual $\vec{r}'(t)\, y\, \vec{r}''(t)$ son perpendiculares. 0.5 pto.