UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO MATEMATICA Y C.C.

TERCERA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Segundo Semestre 2010
(10/12/2010)

Pregunta 1:

Calcular el volumen del sólido limitado inferiormente por $z = x^2 + y^2$ **y superiormente por el plano** $z - y = 0$ **.**

Solución:

En la intersección de superficies $z = x^2 + y^2$ con $z - y = 0$ se tiene $y = x^2 + y^2$ que proyectado en el plano xy determina la circunferencia $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, que tiene centro en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}$. Se utilizan coordenadas cilindricas con lo cual el solido cuyo volumen se pide se describir como:

a) $Q = \{(r,\theta,z)/\, 0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le r \le sen\theta,\ \ r^2 \le z \le rsen\theta\}$

1 punto

b) $Q = \left\{(r,\theta,z)/\, 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ 0 \le r \le \frac{1}{2},\ \ r^2 + rsen\theta + \frac{1}{4} \le z \le \frac{1}{2} + rsen\theta\right\}$

1 punto

Con: a)

$$V(Q) = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{sen\theta}\left(\int_{r^2}^{rsen\theta} rdz\right)dr\right)d\theta = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{sen\theta} rz\Big|_{r^2}^{rsen\theta} dr\right)d\theta = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{sen\theta} r\left(rsen\theta - r^2\right)dr\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{r^3}{3}sen\theta - \frac{r^4}{4}\right)_0^{sen\theta} d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{sen^4\theta}{3} - \frac{sen^4\theta}{4}\right)d\theta = \frac{1}{12}\int_0^{\pi} sen^4\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{48}\int_0^{\pi}\left(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right)d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{48} + \frac{1}{48}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{48} + \frac{\pi}{96} \Rightarrow$$

$$\boxed{V(Q) = \frac{\pi}{32}}$$

1 punto

Con: b)

$$V(Q)=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_{r^2+rsen\theta+\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}+rsen\theta} rdz\right)dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} rz\Big|_{r^2+rsen\theta+\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}+rsen\theta}dr\right)d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} rz\Big|_{r^2+rsen\theta+\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}+rsen\theta}dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} r\left(\frac{1}{2}+rsen\theta-r^2-rsen\theta-\frac{1}{4}\right)dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{4}-r^3\right)dr\right)d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{8}-\frac{r^4}{4}\right)_0^{\frac{1}{2}}d\theta=2\pi\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{V(Q)=\frac{\pi}{32}}$$

1 Punto

Pregunta 2:

Dado el campo vectorial $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)(x, y, z)$, **obtener:**

a) $\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ **si C es** $\vec{r}(t) = (\cos t, sen t, t)$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $\iint_S \vec{F}\, \hat{n}\, ds$ **si la superficie está dada por** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Solución:

a) El campo vectorial $\vec{F}$ tiene componentes $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)x$,

$g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)y$, $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)z$, de clase $C^{(1)}$ y sus derivadas:

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y} = 2yz$, $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} = 2xz$ determinan $\nabla \times \vec{F} = 0$, con lo cual

$\vec{F}$ es campo gradiente; la integral no depende de C su potencial es:

$$\phi(x, y, z) = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{4}$$

0.5 puntos

C tiene punto inicial $A = \vec{r}(0) = (1,0,0)$ y punto final $B = \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0,1,\frac{\pi}{2}\right)$ Entonces:

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \phi\left(0,1,\frac{\pi}{2}\right) - \phi(1,0,0) \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^4}{64}}$$

0.5 puntos

b) Como $\vec{F} \in C^{(1)}$ y S es superficie regular cerrada entonces con teorema de Gauss:

$$\iint_S \vec{F}\, \hat{n}\, ds = \iiint_R \nabla \circ \vec{F}\, dv$$

$$\nabla \circ \vec{F} = \nabla \circ \left[(x^2+y^2+z^2)x, (x^2+y^2+z^2)y, (x^2+y^2+z^2)z\right] =$$
$$= 2x^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2y^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2z^2 + x^2 + y^2 + z^2$$
$$= 5(x^2+y^2+z^2)$$

0.6 puntos

Entonces:

$\iiint_R \nabla \circ \vec{F}\, dv = \iiint_R 5(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ y con coordenadas esféricas,

$$\iiint_R \nabla \circ \vec{F}\, dv = 5\iiint_{R'} p^4 sen\phi dp d\theta d\phi = 5\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} p^4 sen\phi dp d\theta d\phi \Rightarrow$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}\,\hat{n}\, ds = 4\pi a^5}$$

0.4 puntos

Alternativa a') Directamente con:

$$\vec{r}(t) = (sent, \cos t, t)$$

$$= \int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\vec{r}(t))\,\vec{r}\,'(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1+t^2)(\cos t, sent, t) \circ (-sent, \cos t, 1)\right)dt$$

0.5 puntos

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1+t^2)(-\cos t sent + sent\cos t + t)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1+t^2)t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((t+t^3)\right)dt = \left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^4}{64}}$$

0.5 puntos

Alternativa b') Con calculo directo parametrizando la superficie S como:

$$\vec{r}(\theta,\phi) = (a\cos\theta sen\phi, asen\theta sen\phi, a\cos\phi)$$

$$con \quad D: 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \pi$$

$$\vec{r}_\theta = (-asen\theta sen\phi, a\cos\theta sen\phi, 0)$$

$$\vec{r}_\phi = (a\cos\theta\cos\phi, asen\theta\cos\phi, -asen\phi)$$

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi = -a^2(\cos\theta sen^2\phi, sen\theta sen^2\phi, sen\phi\cos\phi) = \vec{n}$$

0.5 puntos

$$\vec{F} \circ \hat{n} = a^5(\cos^2\theta sen^3\phi + sen^2\theta sen^3\phi + sen\phi\cos^2\phi)$$
$$= a^5(sen^3\phi + sen\phi\cos^2\phi) = a^5 sen\phi$$

$$= \iint \vec{F} \circ \hat{n} ds = \iint_D a^5 sen\phi d\theta d\phi = a^5 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen\phi d\phi d\theta$$
$$= a^5 2\pi 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}\,\hat{n}\,ds = 4\pi a^5}$$

0.5 puntos

Pregunta 3:

Usando el teorema de Stokes calcular $\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ para el campo vectorial $\vec{F} = (x, y, x^2 + y^2)$ y C la frontera de la superficie $z = 1 - x^2 - y^2$ acotada por los planos principales en el primer octante.

Solución:

Como $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2) \in C^{(1)}$ y la superficie S es limitada por curvas regulares C_1, C_2, C_3 con $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ (es decir, C es suave a trozos)

0,1 puntos

Obtenemos por el teorema de Stokes:

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} \bullet \vec{n}\, dS = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \bullet \vec{n}\, dS$$

0,5 puntos

$$rot\,\vec{F} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & x^2 + y^2 \end{bmatrix} = (2y, -2x, 0)$$

0,5 puntos

Parametrizando la superficie S como $\vec{r}(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{bmatrix} = (2x, 2y, 1)$$

0,5 puntos

Finalmente:

$$= \int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} \bullet \vec{n}\, dS = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \bullet (\vec{r}_x \times \vec{r}_y)\, dA = \iint_D (2y, -2x, 0) \bullet (2x, 2y, 1)\, dA$$

$$= \iint_D 0\, dA = 0$$

0,4 puntos