UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO MATEMATICA Y C.C.

SEGUNDA PRUEBA DE CÁLCULO AVANZADO 10007
Ingeniería Civil Primer Semestre 2009
(05/06/2009)

Problema 1. Sea $f(x,y) = \begin{cases} y \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad\quad , si(x,y) = (0,0) \end{cases}$

Determinar:

- **a) Si f es continua en (0,0).**
- **b)** $f_x(x,y), f_y(x,y) \quad si(x,y) \neq (0,0)$ **.**
- **c)** $f_x(0,0), f_y(0,0)$.
- **d) Si f es diferenciable en (0,0)**.

Solución:

a) Se estudian aproximaciones al origen (0,0) por trayectorias, por ejemplo, $f(x,0) = 0$, $f(0,y) = \dfrac{-y^3}{y^2} = -y$ que tiende a 0, valor constante y que establecen como posible valor de limite.

$$\ell = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Utilizando la definición se tiene:

$$dado \qquad \varepsilon > 0, \left| y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \qquad si\, \delta = \varepsilon \text{ y con } \ell = 0 = f(0,0)$$

y f es continua en (0,0)

b) Para $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x(x,y) = y \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)} + y \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

c) Para (x,y)=(0,0)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-\frac{k^3}{k^2}-0}{k}=-\lim_{k\to 0}\frac{k}{k}=-1$$

d) Se calcula:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta f-df}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}+k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

($siendo\ \ \Delta f=f(h,k)-f(0,0), df=f_x(0,0)h+f_y(0,0)k$) , y este es igual a

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}k\frac{h^2-k^2+h^2+k^2}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{2h^2k}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}\neq 0$$ (ya que por ejemplo con h=k

se tiene aproximación a $\frac{2h^3}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$)

$\therefore$ f no es diferenciable en (0,0)

Problema 2.

a) **Verifique que el sistema de ecuaciones:** $\left.\begin{array}{l} e^u \cos v - x = 0 \\ e^u senv - y = 0 \end{array}\right|$, **define implícitamente a u, v como funciones diferenciables de x e y en una vecindad** $V(P_o)$ con $P_o = (x_o, y_o, u_o, v_o) = (0,1,0,\pi/2)$.

b) **Obtener** u_x, v_x, u_y, v_y **en la vecindad** $V(P_o)$ **y evaluar en el punto** P_o.

c) **Verificar que los gradientes** ∇u **y** ∇v **son perpendiculares en cada punto de la vecindad** $V(P_o)$.

Solución:

a) Verificación:

(1) El sistema en $P_o = (0,1,0,\pi/2)$ cumple:

$$F(P_o) = e^0 \cos(\pi/2) - 0 = 0$$
$$G(P_o) = e^0 sen(\pi/2) - 1 = 0$$

(2)F,G Todas De clase C(1)

$$F_x = -1, F_y = 0, F_u = e^u \cos v, F_v = -e^u senv$$
$$G_x = 0, G_y = -1, G_u = e^u senv, G_V = e^u \cos v$$

(3) $J = \left|\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u senv \\ e^u senv & e^u \cos v \end{vmatrix} = e^{2u}\ ;\quad J(P_o) = e^0 = 1 \neq 0$

Por lo tanto el sistema define u=u(x,y), v=v(x,y) diferenciables en $V(P_o)$

b) Derivando el sistema dado respecto a x:

$$(e^u \cos v)u_x + e^u(-senv)v_x = 1$$
$$(e^u senv)u_x + (e^u \cos v)v_x = 0$$

De donde se obtiene:

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -e^u senv \\ 0 & e^u \cos v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u senv \\ e^u senv & e^u \cos v \end{vmatrix}} = \frac{\cos v}{e^u} \qquad v_x = \frac{\begin{vmatrix} e^u \cos v & 1 \\ e^u senv & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u senv \\ e^u senv & e^u \cos v \end{vmatrix}} = \frac{-senv}{e^u}$$

Desarrollando con respecto a y:

$$(e^u \cos v)u_y - (e^u senv)v_y = 0$$
$$(e^u senv)u_y + (e^u \cos v)v_y = 1$$

Se obtiene:

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -e^u senv \\ 1 & e^u \cos v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u senv \\ e^u senv & e^u \cos v \end{vmatrix}} = \frac{senv}{e^u} \qquad v_y = \frac{\begin{vmatrix} e^u \cos v & 0 \\ e^u senv & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u senv \\ e^u senv & e^u \cos v \end{vmatrix}} = \frac{\cos v}{e^u}$$

Además: $u_x(P_o) = 0, \ \ v_x(P_o) = -1, \ \ u_y(P_o) = 1, \ \ v_y(P_o) = 0$

c) Se tiene que:

$$\nabla u = (-e^u \cos v, e^{-u} senv), \quad \nabla v = (-e^u senv, e^{-u} \cos v)$$

$$\Rightarrow \nabla u \circ \nabla v = -e^{2u} \cos v senv + e^{-2u} senv \cos v = 0$$

$$\therefore \nabla u \perp \nabla v$$

Problema 3.

Sean x, y los ángulos agudos de un triangulo rectángulo. Determinar usando multiplicadores de Lagrange el valor máximo de la función f(x,y)=sen(x)sen(y).

Solución:

Se cumple que $x+y+\frac{\pi}{2}=\pi \quad \Rightarrow \quad x+y=\frac{\pi}{2}$, condición para x, y. Como f(x,y)=senxseny, aplicando método de multiplicador para puntos críticos

Se considera, $L(x,y,\lambda) = \text{senxseny} + \lambda\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad$ el siguiente sistema :

$$\left.\begin{array}{l} L_x = \cos x senx + \lambda = 0 \\ L_y = senx \cos y + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + y - \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right|$$

De donde se deduce:

$$\text{cosxseny} = \text{senxcosy} \quad \Rightarrow \quad tgx = tgy; \quad con \quad x = y \neq 0, \quad tgx = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x = \frac{1}{tgx} \Rightarrow$$

$$tgx = \pm 1 \quad y \quad P_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \quad es \quad punto \quad critico \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

Otra posible solución se descarta por la naturaleza del problema.

En este punto crítico se tiene de:

$$f'(x,y(x)) = \cos x seny + (senx)(\cos y)y'(x), \quad con \quad y'(x) = -1 \Rightarrow$$

$$f'(x,y(x)) = \cos x seny - senx \cos y = sen(y-x) \Rightarrow$$

$$f''(x,y(x)) = (\cos(y-x))(y'(x)-1) = -2\cos(y-x) \quad y$$

$$f''(P_1) = -2 < 0 \Rightarrow \quad f(P_1) = sen\frac{\pi}{4} sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \quad valor \quad máximo \quad de \quad f$$