INTEGRALES DE LINEA Y DE SUPERFICIE

GUIA PROBLEMAS PROPUESTOS

Prof. Miguel Martínez Concha

Integrales de línea

1.- Evalúe la integral de línea $\int_c x^2dx + 2xydy$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ a lo largo de cada una de las siguientes curvas

a) $c: x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & 1 \le t \le 2 \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1 \\ t-1 & 1 \le t \le 2 \end{cases}$

b) $c: x = t, \quad y = t^2, \quad 0 \le t \le 1$

2.- Evaluar las integrales de trayectoria $\int_c f(x,y,z)ds$ en los siguientes casos:

a) $f(x,y,z) = yz$, y $c(t) = (t, 3t, 2t), \quad t \in [1,3]$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{y+z}$, y $c(t) = (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t), \quad t \in [1,2]$

3.- Sea c la trayectoria dada por $c(t) = (t^2, t, 3), \quad t \in [0.1]$. Hallar $\ell(c)$, la longitud de la trayectoria.

4.- Evalúe cada una de las siguientes integrales de línea

a) $\int_c xdy$, donde c es la trayectoria $y = x^4 + x^3$ desde (0,0) hasta (1,2).

b) $\int_c (2x+1)dx + x^2dy$ donde c es la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$

c) $\int_c (x^3 + 4y)dx + (e^{2y} - 2z)dy + zdz$, en donde c es el triángulo con vértices A(1,0,0), B(0,1,0), C (0,0,1) recorrido de A a B a C a A.

d) $\int_c y^2dx + xdy$, c describe la hipocicloide de ecuaciones paramétricas $x = a\cos^3 t, y = asen^3 t, \quad a > 0$

5.- Evalúe cada una de las integrales de línea $\int_c F \cdot ds$, donde F y C es como se da.

a) $F(x,y,z) = yi + 2xzj + (y/z)k$ y C es la trayectoria $y = x, \quad z = y^2 + 1$ que une a (0,0,1) con (2,2,5)

b) $F(x,y,z) = x^2i + y^2j + (xz-y)k$ y C es la trayectoria $r(t) = t^2i + 2tj + 4t^4k$ c que une (0,0,0) con (1,2,4).

6.- Obtenga el trabajo realizado por el campo de fuerzas F al mover una masa unitaria a lo largo de la curva C en cada caso

a) $F(x,y,z)=(2x+yz,xz,xy)$ y C es la recta que une (1,-1,0) con (2,1,4).

b) $F(x,y)=(senx\cos y)i+(\cos xseny+x)j$ y C es el circulo unitario recorrido en sentido de giro de las manecillas del reloj.

7.- Considere la integral de línea bidimensional

$$I=\int_c \frac{-ydx+2xdy}{y^3}$$

a) Obtenga el o los dominios , si los hay, en donde I es independiente de trayectoria.

b) Evalúe I si C es el arco parabólico $y=6-x^2$ que une el punto (2,2) con el punto (1,5).

8.- Resolver $\oint_c (x^2-2y)dx+(4x-y^3)dy$ si C es la curva $x^2+4y^2=16$

9.- Resolver ,$\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para $\vec{F}=(z,x,y)$ y C es la curva de intersección de $x^2+y^2+z=1$ con $y+2z=2$.

10.- Verificar el teorema de Green para $M(x,y)=x+y$, $N(x,y)=2x-y$ en dominio $D\subseteq\mathbb{R}^2$ limitado por las curvas $x^2+4y^2=4,\ x^2+y^2=9$.

11.- Determine si las siguientes integrales de línea son independientes de la trayectoria o no. Para aquellas que lo sean, halle la función potencial ϕ, evalúe la integral de línea.

a) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} (2x+1)dx+x^2dy$

b) $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} yzdx+xdy+xydz$

c) $\displaystyle\int_{(0,5,-1)}^{(1,\ln 2,1)} (ye^{xy}i+xe^{xy}j+kz)\cdot dr$

d) $\int_c 2xy^3zdx+(3x^2y^2z+4z)dy+(x^2y^3+4y)dz$, donde

C: $x=\cos t, y=sent, z=2t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$

12.- Utilice el teorema de Green para evaluar cada integral de línea $\oint_c F \cdot ds$, donde F y C son como a continuación se indica

a) $F = (2x - y)i + (x + 3y)j$ y C es el triángulo de vértices (0,0), (2,0) , (2,2).

b) $F = (x^2 y)i + (xy^2)j$ y C consiste en la línea recta $y = 0, \quad -1 \le x \le 1$ y la parte de la parábola $y = 1 - x^2$ que se encuentra en el semi plano superior

c) $F = (x^3 - 4y^3)i + (4x^3 + 7xy^2)j$, y C en la elipse $x^2 + y^2 / 4 = 1$

Integrales de superficie

13.- Evaluar $\iint_s zdS$ donde S es el hemisferio superior de radio a de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$.

14.- Evaluar $\iint_s zdS$ donde S es la superficie $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$

15.- Evaluar $\iint_s (z + y^2) dS$, donde S es la superficie cilíndrica $x^2 + z^2 = 1$, $0 \le y \le 1$

16.- Evaluar $\iint_s zdS$ donde S es la porción del plano $x + y + 2z = 2$ en el primer octante utilice la siguiente representación paramétrica: $x=2u$, $y=v$, $z=1-u-v$.

17.- Evaluar $\iint_s (z + y^2) dS$, donde S es la superficie cilíndrica circular dada por $x^2 + z^2 = 1, \quad z \ge 0, \quad 0 \le y \le 1$, utilizando la siguiente representación paramétrica $x = \cos u, y = v, z = senu$

18.- Evaluar $\iint_s (\nabla \times F) \cdot dS$, donde S es la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1, z \le 0$, y $F = yi - xj + zx^3 y^2 k$ (hacer que ***n***, la normal unitaria, apunte hacia arriba)

19.- Verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial y la superficie dada

a) $F = (x + 2y)i + (y + 2z)j + (z + 2x)k$, el triángulo con vértices (1,0,0), (0,1,0) , (0,0,1).

b) $F = yi + 2xj + zk$, el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

c) $F = zi + xj + yk$, $z = x^2 - y^2$ para $x^2 + y^2 \le a^2$, $a > 0$

20.- Verifique el teorema de la divergencia para:

a) el campo vectorial $F = x^2 i + y^2 j + z^2 k$ y el cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

b) el campo vectorial $F = xzi + 2yzj + 3xyk$ y el cilindro $x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le z \le 3$.

Respuestas

1.- a) $\frac{4}{3}$, b) $\frac{17}{15}$ 2.- a) $52\sqrt{14}$ b) $\frac{16}{3}-2\sqrt{3}$ 3.- $\left[2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}\right]/4$

4.- a) 31/20, b) 0 , c) -1. d) $\frac{3}{8}\pi a^2$. 5.- a) $18-2\arctan 2$, b) 3 6.- a) 11, d) π

7 .- a) Cualquier dominio que no contenga al eje X b) $\frac{23}{50}$. 8.- Use Green , 48π.

9.- $\frac{3\pi}{8}$, se puede resolver también aplicando el teorema de Stokes. 10.- 7π .

11.- a) 2 b) no c) 3 d) 4π ; 12.- a) 4 , b) $-\frac{4}{7}$, f) $43\pi/4$; 13.- πa^3.

14.- $\frac{\pi}{4}\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{15}\right)$; 15.- $2\pi/3$; 16.- $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 17.- $2+\frac{\pi}{3}$; 18.- 2π

19.- a) -3, b) π , c) πa^2 ; 20.- a) 3, b) 54π