UNIVERSIDAD DE SANTIAGO
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTOS DE MATEMATICA Y C.C.

CALCULO AVANZADO
PARA INGENIERIA

Guía de ejercicios

Aplicar concepto de derivación implícita y teorema que corresponda.

1) En cada uno de los ejercicios siguientes, verificar si las hipótesis del teorema de la(s) función(es) implícita(s) se cumplen, y obtener las derivadas propuestas:

a) $F(x,y) = e^{2x+y} + \sin(x+y^2) - 1 = 0$, entorno a $P_0 = (0,0)$; $y\prime(0)$.

b) $F(x,y) = y\ln\left(x^2+y^2\right) - 2xy = 0$, entorno a $P_0 = (0,1)$; $y\prime(0)$.

c) $G(x,y) = x^y + y^x - 2xy = 0$, entorno a $P_0 = (2,2)$; $y\prime(2)$.

d) $F(x,y,z) = x\sin^2 y + x - 3y + z = 0$, entorno a $P_0 = (0,0,0)$; $z_x(0,0)$, $z_y(0,0)$.

e) $F(x,y,z) = xy + z + 3xz^5 - 4 = 0$, entorno a $P_0 = (1,0,1)$; $z_x(1,0)$, $z_y(1,0)$.

f) $F(x,y,z) = xyze^z \ln z - 3x + 3y = 0$, entorno a $P_0 = (1,1,1)$; $z_x(1,1)$, $z_y(1,1)$.

g) $F(x,y,z,u) = x\sin x + y\sin y + z\sin z + u\sin u = 0$, en torno a $P_0 = (0,0,0,0)$; $u_x(0,0,0), u_y(0,0,0), u_z(0,0,0)$.

Soluciones.
En el punto $P_0 = (0,0)$ se verifica las condición:

$$F(P_0) = 1 + 0 + 1 = 0$$

Todas las derivadas parciales:
$F_x = 2e^{2x+y} + \cos\left(x+y^2\right)$, $F_y = e^{2x+y} + 2y\cos\left(x+y^2\right)$
son funciones continuas $\forall (x,y) \in V(0,0)$ (puesto que son suma y composición de funciones continuas en IR^2). Se tiene además
$F_y(0,0) = 1 + 0 = 1 \neq 0$
Entonces, la ecuación define función $y = y(x)$, en una vecindad $V\ (0)$, y la derivada es

$$y'(x) = -\frac{2e^{2x+y} + \cos\left(x+y^2\right)}{e^{2x+y} + \cos\left(x+y^2\right)} \quad \forall (x,y) \in V(0,0)$$

En particular

$$y'(0) = -\frac{(2+1)}{1} = -3$$

b) Respuesta

$$y'(0) = -\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = -\frac{(-2)}{2} = 1$$

c) En el punto $P_0 = (2,2)$ se verifica las condición:

$$F(2,2) = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

Todas las derivadas parciales:
$F_x = yx^{y-1} + y^x (\ln y) - 2y$, $F_y = x^y \ln(x) + xy^{x-1} - 2x$
son funciones continuas $\forall (x,y) \in V(2,2)$
Se tiene además
$F_y(2,2) = 2^2 \ln(2) + 2 \cdot 2 - 4 = 4 \ln 2 \neq 0$
Entonces la ecuación define función $y = y(x)$, en una vecindad $V\ (2)$, y tiene la derivada

$$y'(x) = -\frac{yx^{y-1} + y^x (\ln y) - 2y}{x^y \ln(x) + xy^{x-1} - 2x} \qquad \forall (x,y) \in V(2,2)$$

En particular

$$y'(2) = -\frac{(4 + 4\ln 2 - 4)}{(2\ln 2 + 4 - 4)} = -1$$

e) En el punto $P_0 = (1,0,1)$ se verifica las condición:

$$F(1,0,1) = 0 + 1 + 3 - 4 = 0$$

Todas las derivadas parciales:
$F_x = y + 3z^5$, $F_y = x$, $\ F_z = 1 + 15xz^4$
son funciones continuas $\forall (x,y,z) \in V(1,0,1)$, puesto que son funciones polinómicas. Se tiene además
$F_z(1,0,1) = 16 \neq 0$
Entonces la ecuación define función $z = z(x,y)$, diferenciable en una vecindad $V\ (1,0)$, con la derivadas

$$\begin{aligned} z_x(x,y) &= -\frac{y + 3z^5}{1 + 15xz^4} \qquad \forall (x,y) \in V(2,2) \\ z_y(x,y) &= -\frac{x}{1 + 15xz^4} \qquad \forall (x,y) \in V(2,2) \end{aligned}$$

En particular

$$\begin{aligned} z_x(1,0) &= -\frac{3}{16} \\ z_y(x,y) &= -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

g)En el punto $P_0 = (0,0,0,0)$ se verifica las condición:

$$F(0,0,0,0) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Todas las derivadas parciales:

$F_x = \sin x + x\cos x,\ F_y = \sin y + y\cos y, F_z = \sin z + z\cos z,$
$F_u = \sin u + u\cos u,$
son funciones continuas $\forall\,(x,y,z) \in V\,(1,0,1)$, puesto que son suma y producto de funciones continuas en IR^4 . Se tiene además:
$F_u\,(0,0,0,0) = 0$
Entonces la ecuación no define función $u = u\,(x,y,z)$.

2) Derivar implicitamente las funciones definidas por el sistema de ecuaciones que verifican ciertas condiciones:

$$\begin{aligned} F\,(x,y,u,v) &= x - u\cos v + 1 = 0 \\ G\,(x,y,u,v) &= x + y - u\sin v = 0 \end{aligned}$$

en una vecindad del punto $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) = \left(-1, 0, 1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Solución.
En el punto $P_0 = \left(-1, 0, 1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ se tiene:

$$\begin{aligned} F\,(P_0) &= -1 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0 \\ G\,(P_0) &= -1 - 0 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Todas las derivadas parciales:
$F_x = 1,\ F_y = 0,\ F_u = -\cos v,\ F_v = 0;$
$G_x = 1,\ G_y = 1,\ G_u = -senv,\ G_v = -u\cos v$
son funciones continuas $\forall\,(x,y,u,v) \in V\,(P_0)$ vecindad centrada en P_0.
Se tiene además
$J = \dfrac{\partial\,(F,G)}{\partial\,(u,v)}\,(P_0) = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}(P_0) = \begin{vmatrix} -\cos v & u\sin v \\ -\sin v & -u\cos v \end{vmatrix}$

$J = u\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)(P_0) = 1 \neq 0$
Entonces el sistema define funciones $u = u\,(x,y)\,, v = v(x,y)$ en una vecindad $V\,(-1,0)\,,$ las cuales tienen derivadas parciales continuas en V dadas por Derivando parcialmente con respecto a x ,queda:

$$\begin{aligned} 1 - \cos v\frac{\partial u}{\partial x} + u\sin v\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ 1 - \sin v\frac{\partial u}{\partial x} - u\cos v\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & u\sin v \\ -1 & -u\cos v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\cos v & u\sin v \\ -\sin v & u\cos v \end{vmatrix}} = \frac{u\cos v + u\sin v}{u} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(-1,0,1,-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-1}{1}=-1$$

Además,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-\cos v & -1\\ -\sin v & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\cos v & u\sin v\\ -\sin v & u\cos v\end{vmatrix}}=\frac{\cos v-\sin v}{u}\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(-1,0,1,-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{1}=1$$

Del mismo modo, derivando parcialmente con respecto a y ,obtenemos:

$$\begin{aligned}-\cos v\frac{\partial u}{\partial y}+u\sin v\frac{\partial v}{\partial y} &= 0\\ 1-\sin v\frac{\partial u}{\partial y}-u\cos v\frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}0 & u\sin v\\ -1 & -u\cos v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\cos v & u\sin v\\ -\sin v & u\cos v\end{vmatrix}}=\frac{u\sin v}{u}=\sin v\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(-1,0,1,-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

Asimismo,

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}-\cos v & 0\\ -\sin v & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\cos v & u\sin v\\ -\sin v & u\cos v\end{vmatrix}}=\frac{\cos v}{u}\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(-1,0,1,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{0}{1}=0$$

Considere las expresiones
a)

$$\begin{aligned}u^3+xv-y &= 0\\ yu+v^3-x &= 0\end{aligned}$$

en torno al punto $P_0=(1,1,1,0)$.
b)

$$\begin{aligned}e^u+e^v-x-ey &= 0\\ ue^u+ve^v-exy &= 0\end{aligned}$$

en la vecindad del punto $P_0 = (1, 1, 0, 1)$.
c)

$$\begin{aligned} uv - 3x + 2y &= 0 \\ u^4 - v^4 - x^2 + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

en la vecindad del punto $P_0 = (1, 1, 1, 1)$.
Suponga que estos sistemas definen funciones $u = u(x, y), v = v(x, y)$ en una vecindad V de (x_0, y_0) y en cada uno de los casos determine:
i) $u_x(P_0), u_y(P_0), v_x(P_0), v_y(P_0)$.
ii) las ecuaciones de los planos tangentes en P_0 a las superficies.