UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C.C
GUIA DE EJERCICIOS #1
CÁLCULO AVANZADO 10007, 10121, 96007
Ingeniería Civil Primer Semestre 2013
(05/04/2013)

1.- (a) Obtenga la serie de Fourier seno de $f(x) = x(\pi - x), 0 \leq x \leq \pi$.
(b) Utilice el resultado anterior para calcular las series:

$$\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k-1)^3} \;\; ; \;\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} \;\; y \;\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} sen((2k-1)\sqrt{5}\pi$$

Para mostrar que $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{sen(2n-1)}{(2k-1)^3} > 0$ para todo $x \in (0, \pi)$.

(c) Si $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$. Haga un grafico de $S(x)$ para $x \in [-\pi, 4\pi]$.

2.- Sea f una función 2π periódica seccionalmente continua en $[-\pi, \pi]$. Suponga que la serie de Fourier de f es

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

(a) Obtenga la serie de Fourier de la función $g(x) = f(x)\cos(x), x \in R$.
(b) Utilice la idea anterior para obtener las series de Fourier de las funciones g y g'correspondientes a la función $f(x)$ definida en el ejercicio 1. Encuentre el período de estas funciones y calcule:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(4n^2+3)}{(4n^2-1)^3}$$

3.- (a) Obtener la serie de Fourier coseno de $f(x) = x[x], 0 \leq x \leq 2$. Haga un gráfico de la serie para $x \in [0,6]$.

(b) Obtener la serie de Fourier de $f(x) = x[x], -2 \leq x \leq 2$. Haga un gráfico de la serie para $x \in [-2,6]$.

4.- Sea $f(x) = \sin(cx)$, $0 \leq x \leq \pi$, una función par 2π-periódica en $\mathbb{R}$ y $c > 0$, $c \notin \mathbb{N}$
(a) Obtenga la serie de Fourier de f
(b) Deduzca que

$$\left[\frac{1}{2c^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{c^2 - n^2}\right] \cos(\pi c) = \frac{1}{2c^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^2 - n^2}$$

Además, demuestre que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1} = 1$$

5. (a) Sea f una función de período 2 tal que Sea $f(x) = e^{-x}$, $-1 < x < 1$. Determine el desarrollo de Fourier de f y utilice este desarrollo para calcular.

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1 + (\pi n)^2}$$

(b) Sea $f(x) = e^{x}$, $0 < x < 2$. Obtenga una serie de Fourier $S(x)$ que sea una función impar de período 6 tal que $S(x) = f(x)$ para $0 < x < 2$. Estudie la convergencia de esta serie en los puntos $x = 0{,}2{,}3$

6.- Sea $x \in \mathbb{R}$. Se define $f(\theta) = \cos\,(x\, sin\theta)$; $\theta \in \mathbb{R}$
(a) Muestre que f tiene período π
(b) Escriba la forma general del desarrollo de Fourier de f y la expresión integral para los coeficientes$a_n(x)\ y\ b_n(x)$. Obtenga los coeficientes $b_n(x)$.
(c) Muestre que el coeficiente $a_o(x)$ verifica la ecuación diferencial
$x a_o^{\prime\prime(x)} + a_o^{\prime(x)} + x a_o(x) = 0$
(d) Le parece que la función $g(\theta) = \cos\,(\theta\, sen\theta)$; $\theta \in \mathbb{R}$

7.- Sea f una función seccionalmente continua impar, de período $4L$ y que es par con respecto a $x = L$. Mostrar que el desarrollo de Fourier de f es

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\, sen\ \frac{(2n-1)\pi}{2L} x$$

donde los coeficientes se obtienen de la expresión.

$$b_{2n-1} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sen\ \frac{(2n-1)\pi}{2L} x dx$$

8.- Determine la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x < -1 \\ 1, & -1 \le x \le 1 \\ 0 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Evalúe la serie en $x = 0{,}1{,}2{,}3$ y compare con el límite de la serie

9.- Obtenga la fórmulas trigonométricas para $cos^2 x$ y $cos^3 x$.
10.- Determine la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{L} x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{2(L-x)}{L} & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

Y el desarrollo de Fourier seno de f.

11.- Muestre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^2}{96}$$

Indicación. Utilice la función

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$