USACH Cálculo Avanzado

Guía de ejercicios Nº4 (Cápitulo II)

Profesores: Emilio Villalobos M.
Miguel Martínez C

1.- Para : $\vec{f}:[a,b]\to \Re^{n}$, $\vec{g}:[a,b]\to \Re^{n}$ derivables, probar:

a) $(\alpha\,\vec{f}+\beta\,\vec{g}\,) = \alpha\,\vec{f}\,+\,\beta\,\vec{g}$ α,β ctes.;

b) $(\alpha$ (t) $\vec{f}$ (t))' $= \alpha'(t)\vec{f}(t)+\alpha(t)\vec{f}'(t)$ Si $\alpha=\alpha(t)$ función escalar

c) $(\vec{f}\,.\,\vec{g})' = \vec{f}'\,.\,\vec{g}+\vec{f}\,.\,\vec{g}'$ en t ;

d) $(\vec{f}\,\times\,\vec{g})' = \vec{f}'\times\,\vec{g}\,+\,\vec{f}\times\vec{g}'$ en t , n=3

2.- Para $\vec{f}(t)=(e^{2t},t^{2},e^{-2t})$ obtener :

a) $\vec{f}\,'(t)$; b) $\vec{f}''(t)$; c) $||\,\vec{f}\,'(t)||$; d) $||\,\vec{f}(t)||$; e) $||\,\vec{f}(t)||$ '.

3.- sea $\vec{f}(t)=\alpha(t)\hat{e}(t)$ con $\alpha=\alpha(t)$ escalar variable y $\hat{e}=\hat{e}(t)$ vector de módulos 1

derivables.

Calcular $f\,'(t)$

a) si $\vec{f}(t)$ varía solo en módulo

b) si $\vec{f}(t)$ varía solo en dirección

4.- a) sea $\vec{f}=\vec{f}(t)$ de módulo constante, probar que $\vec{f}(t)\bullet\vec{f}\,'(t)=0$ y por lo tanto $\vec{f}\,'(t)$ y $\vec{f}(t)$ son perpendiculares.

b) sea $\vec{f}=\vec{f}(t)$ de dirección constante, probar que $\vec{f}(t)\times\vec{f}'(t)=\vec{0}$ y por tanto $\vec{f}(t)$ y $\vec{f}\,'(t)$ son paralelas.

5.- para las curvas dadas por su ecuación vectorial paramétrica $\vec{r}=\vec{r}(t), t\in[a,b]$ eliminar t y obtener su respectiva ecuación cartesiana:

a) $\vec{r}(t)=(t,t^3)$, $t\in[0,1]$

b) $\vec{r}(t)=(a\cos t, b\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$

c) $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin^2 t)$, $t\in[0,2\pi]$

d) $\vec{r}(t)=(t,t^2,t^3)$, $t\in[0,1]$

e) $\vec{r}(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$, $t\in[0,2\pi]$

6.- Parametrizar en la forma $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t\in[a,b]$ las curvas C definidas por :

a) linea recta por puntos A = (1,2,-3), B = (2,2,2)

b) $\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ y-z=0 \end{matrix}\right|$ c) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=9 \\ z-1=0 \end{matrix}\right|$ d) $\left.\begin{matrix} y=3x^3 \\ z=0 \end{matrix}\right|$ e) $\left.\begin{matrix} x^2-ax+y^2=0 \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{matrix}\right|$

7.-Obtener los vectores unitarios T, N, B, $\left(\hat{t},\hat{n},\hat{b}\right)$ para C:

a) $\vec{r}(t)=(1+t,3-t,4+2t)$, $t_0=1$

b) $\vec{r}(t)=\left(t,t^2,\frac{t^3}{3}\right)$, $t_0=1$

c) $\vec{r}(t)=\left(\frac{t^3}{3},2t,2/t,\right)$, $t_0=2$

d) $\vec{r}(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t,e^t)$, $t_0=0$

e) $\vec{r}(t)=\left(2\cosh\frac{t}{2},2\sinh\frac{t}{2},2t\right)$, $t_0=0$

8.- calcular la longitud $\ell(C)$ de curva C:

a) $\vec{r}(t)=(t,t^2)$, $t\in[0,1]$

b) $y=\cosh x$, $x\in[0,1]$

c) $y=x^{3/2}$, $z=0$ desde (0,0,0) a (4,8,0)

d) $\vec{r}(t)=(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$, $t\in[0,2\pi]$

e) $\vec{r}(t)=\left(t,\frac{3}{2}t^2,\frac{3}{2}t^3\right)$, $t\in[0,2]$

f) $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in \left[0, \pi/2\right]$

g) $\vec{r}(t) = (5t, 4t^2, 3t^2)$, $t \in [0,2]$

h) $\vec{r}(t) = (t, \ln(\sec t + \tan t), \ln(\sec t))$, $t \in \left[0, \pi/4\right]$

i) $\vec{r}(t) = (t, t, t^2)$, $t \in [1,2]$

j) $\vec{r}(t) = \left(t+1, \dfrac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} + 7, \dfrac{1}{2} t^2 \right)$, $t \in [1,2]$

9.- Parametrizar en la forma $\vec{r} = \vec{r}(s)$ $, s \in [0, l]$, con s longitud de arco las curvas:

a) $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

b) $9y^2 - 4x^3 = 0$, $x \geq 0$

c) $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$

d) $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

10) Con la definición correspondiente probar que C es rectificable:

a) $\vec{r}(t) = (t^2, \sin t)$, $t \in \left[0, \pi/2\right]$

b) $\vec{r}(t) = \left(t^{\alpha} \sin \dfrac{1}{t}, t \right)$, $t \in [0,1]$, $\vec{r}(0) = (0,0)$ *si* $\alpha > 1$, *cte.*

11.- Obtener T, N, B, K y   en cada punto de C si   :

a) $\vec{r}(t) = \left(t, t^2, \dfrac{2}{3} t^3 \right)$

b) $\vec{r}(t) = \left(t - \dfrac{t^3}{3}, t^2, t + \dfrac{t^3}{3} \right)$

c) $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, t)$

d) $\vec{r}(t) = (t, \cosh t, t\sinh t)$

e) $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

f) $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, a\cos t)$

g) $\vec{r}(s)=\left(arctgs,\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+s^2),s-\arctan s\right)$

12.- Calcular K(t_0)(curvatura), T(t_0)(torsión) para C en le punto dado :

a) $\vec{r}(t)=(2\sin t,3,2\cos t)$, $t_0=\frac{\pi}{4}$

b) $\vec{r}(t)=\left(t,t^2,\frac{t^3}{3}\right)$, $t_0=0$

c) $\vec{r}(t)=\left(e^t\cos t,e^t\sin t,e^t\right)$, $t_0=0$

d) $\vec{r}(t)=\left(t,\frac{1}{2}t^2,t^2\right)$, $t_0=1$

13.- Determinar las ecuaciones de la recta tangente y el plano Osculador a las curvas C dada por :

a) $\vec{r}(t)=\left(t^2,2t,t^3-1\right)$ en $P_0=(1,2,0)$

b) $\vec{r}(t)=(t\sin t,t\cos t,t)$ en $P_0=(0,0,0)$

c) $\vec{r}(t)=\left(t-\sin t,1-\cos t,4\sin\frac{t}{2}\right)$ en $\vec{r}(\frac{\pi}{2})$

d) $\left.\begin{array}{l}x=y^2\\ z=x^2\end{array}\right|$ en $P_0=(1,1,1)$ e) $\left.\begin{array}{l}x=y\\ x^2+y^2=z^2\end{array}\right|$ en $P_0=(1,1,\sqrt{2})$

f) $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=10\\ y^2+z^2=25\end{array}\right|$ en $P_0=(1,3,4)$ g) $\left.\begin{array}{l}x^2+2y^2=6\\ 2x^2+3y^2+z^2=47\end{array}\right|$ en $P_0=(-2,1,6)$

14.- Si en instante t el vector posición de una partícula en movimiento es dada por $\vec{r}=\vec{r}(t)$ obtener velocidad, rapidez, aceleración y las componentes tangencial y normal de la aceleración :

a) $\vec{r}(t)=\left(1,-4t^2,3t^2\right)$

b) $\vec{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$

c) $\vec{r}(t)=\left(t^2,2t,t^3-1\right)$

d) $\vec{r}(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$

e) $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{3}{2}t^2, \frac{3}{2}t^3 \right)$ $en \quad t_0 = 2$

f) $\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3}, 2t, \frac{2}{t} \right)$ $t_0 = 1$

15.- Para la curva definida por la intersección del plano z = 2y con el cilindro eliptico $2x^2 + 3y^2 = 1$, calcular la curvatura K(P_0) si $P_0 = (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$

16.- Determinar en que punto al curva C dada por :

$\vec{r}(t) = \left(2 + t, 1 + t^2, 3t + t^2\right)$ tiene curvatura máxima.

Algunas respuestas:

6.- b) $\vec{r}(t) = (1 - 2t, t, t)$ que es recta por (1,0,0) y // a $\vec{b}$ = (-1,1,1) , $t \in \Re$

c) $\vec{r}(t) = (3\cos t, 3sen\ t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$

e) $\vec{r}(t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \frac{a}{2} sent, \sqrt{2} asen \frac{t}{4} \right)$, $t \in [0, 2\pi]$.

7.- e) $\vec{r}'(0) = (0,1,2)$, $T(0) = \frac{(0,1,2)}{\sqrt{5}}$

$\vec{r}''(0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0 \right) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) = (0, 1, -\frac{1}{2})$ es la dirección de B

$B(0) = \frac{2}{\sqrt{5}}(0, 1. -\frac{1}{2})$; $\qquad$ N(0)= B(0)×T(0) = (1,0,0)

8.- d) $6a$

10.- a) Se calcula $L_P = \sum_{i=1}^{n} \left\| \vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) \right\| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i^2 - t_{i-!}^2)^2 + (sent_i - sent_{i-1})^2}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow \qquad L_P = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-!})^2 (t_i + t_{i+1})^2 + 4sen^2 \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} \cos^2 \frac{(t_i + t_{i-1})}{2}} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta t_i)^2 \cdot \pi^2 + 4(\tfrac{\Delta t_i}{2})^2 \cdot 1} = \sum_{i=i}^{n} \sqrt{\pi^2 + 1} \Delta t_i = \sqrt{\pi^2 + 1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad L_P \leq \sqrt{\pi^2 + 1} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad \text{toda partición } P$$

lo cual significa que estas sumas son acotadas. Luego C es rectificable.

11.- c) $\mathrm{T}(t) = \dfrac{(1-\cos t, sent, 1)}{\sqrt{3-2\cos t}}$, $\quad \mathrm{B}(t) = \dfrac{(-\cos t, sent, \cos t - 1)}{\sqrt{2+\cos t(\cos t - 2)}}$, $\quad \mathrm{N}(t) = \mathrm{B}(t) \times \mathrm{T}(t)$

$$\mathrm{K(t)} = \frac{\sqrt{2+\cos t(\cos t-2)}}{(\sqrt{3-2\cos t}\ )^3} \quad , \quad \tau(t) = \frac{-1}{1+(\cos t - 1)^2}$$

g) s es parámetro longitud de arco $\|r'(s)\| = 1$, $\quad \mathrm{T(s)} = r'(s) = (\dfrac{1}{1+s^2}, \dfrac{\sqrt{2}s}{1+s^2}, \dfrac{s^2}{1+s^2})$;

$\mathrm{N(s)} = (\dfrac{-\,{}^{2}\!/\!_{\sqrt{2}}\, s}{1+s^2}, .\dfrac{1-s^2}{1+s^2}, \dfrac{{}^{2}\!/\!_{\sqrt{2}}\, s}{1+s^2})$, $\quad B(s) = T(s) \times N(s)$, $\quad K(s) = \left\| \dfrac{dT}{ds} \right\| = \dfrac{\sqrt{2}}{1+s^2}$

Con $\dfrac{dB}{ds} = \tau N$ se obtiene $\tau(s)$.