UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FECULTAD DE CIENCIAS
DEPTO. MATEMATICA Y COMPUTACION

CALCULO III

FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE REAL

Parte 2

COORDINADOR: Emilio Villalobos M.

1. Obtener vectores unitarios T, N, B para la curva $\mathcal{C}$ dada por $\vec{r}(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3})$ en el punto $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

2. Estudiar la deducción de la fórmula $L = L(C) = \int_a^b \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| dt$ para curva regular $\mathcal{C}$

   dada por $\vec{r} = \vec{r}(t) \quad t \in [a, b]$ y aplicarla a los ejemplos que se indican.
   Deducción: Con partición $P = \{t_i\}_{i=1}^{m}$ de $[a, b]$ se tiene

   $$L_P = \sum_{i=1}^{m} \left\|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\right\| = \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\vec{r}_1(t_i) - \vec{r}_1(t_{i-1})\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\vec{r}_n(t_i) - \vec{r}_n(t_{i-1})\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

   $$L_P = \sum_{i=1}^{m} \left\|\vec{r}\,'(t_i)\right\| (t_i - t_{i-1})$$

   (se usó el T.V.M.: $r_j(t_i) - r_j(t_{i-1}) = r_j'(t_i^*)\Delta t_i \qquad j = 1,2, \ldots . n$)

   Ejemplos:
   a) $\vec{r}(t) = (acos(t), asen(t), bt)$ a, b constantes, $t \in [0,2\pi]$
   b) $\vec{r}(t) = (2ln(t), 4t, 1 + 2t^2)$ desde $P_1 = (0,4,3)$ a $P_2 = (2ln2,8,9)$
   Rta. $L = 2ln2 + 6$

3. Calcular la longitud de $\mathcal{C}$ definida por:
   $S_1: x = u, \; y = u, \; z = v \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}$
   $S_2: x = sen(w)\cos(\alpha), y = sen(w)sen(\alpha), \; z = \cos(w) \qquad w, \alpha \in [0, \pi]$

4. Verificar que la siguiente curva $\vec{r}(t) = \left(t^2, sen(t)\right)$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ es rectificable

   $$L_P = \sum_{i=1}^{m} \left\|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\right\| = \sum_{i=1}^{m} \left(\left(t_i^2 - t_{i-1}^2\right)^2 + \left(sen(t_i) - sen(t_{i-1})\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad t \in [0,2\pi]$$

   $$L_P = \sum_{i=1}^{m} \left((t_i - t_{i-1})^2 (t_i + t_{i-1})^2 + 4sen^2\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{2}\right)\cos^2\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\pi^2 + 1}\,\frac{\pi}{2},$$

   entonces $\{L_P\}$ es acotada

5. Para la curva $\mathcal{C}$ dada como $\vec{r}(t) = (acos(t), asen(t), bt),\ t \in [0,2\pi]$

   Parametrizar como $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $\quad s(t) = \int_0^t \left\| \vec{r}\,'(h) \right\| dh$. Obtener

   a) Los vectores unitarios $T(s), N(s), B(s)$
   b) Los escalares curvatura $K(s)$, y torsión $\mathcal{T}(s)$

6. Calcular $T(t), N(t), B(t), K(t), \mathcal{T}(t)$
   a) $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{3}{2}t^2, \frac{3}{2}t^3\right)$
   b) $\vec{r}(t) = (2\ln(t), 4t, 1 + 2t^2)\ \ t \neq 0$
   c) $\vec{r}(t) = \left(1 + cos(t) 1 - cos(t), \sqrt{2}sen(t)\right)\ \ t \in [0,2\pi]$
   d) $\vec{r}(t) = \left(2\cosh\left(\frac{t}{2}\right), 2senh\left(\frac{t}{2}\right), 2t\right)\ \ \ lnt_0 = 0$
   e) $\vec{r}(t) = (2 + t, 1 + t^2, 3t + t^2)$ (calcular t para que la curvatura sea máxima)

   Fórmulas:

$$T(t) = \frac{\vec{r}\prime(t)}{\|\vec{r}\prime(t)\|} \qquad B(t) = \frac{\vec{r}\prime(t) \times \vec{r}\prime\prime(t)}{\|\vec{r}\prime(t) \times \vec{r}\prime\prime(t)\|} \qquad N(t) = B(T) \times T(t)$$

$$K(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \qquad \mathcal{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2} \quad \forall t$$

7. Dada la curva $\mathcal{C}$ dadapor $\vec{r}(t) = \left(\sqrt{6}cos(t), 4sen(t), \sqrt{10}cos(t)\right) \qquad t \in [0,2\pi]$
   a) Calcular la longitud Lde la curva $\mathcal{C}$
   b) Reparametrizar de la forma $\vec{r} = \vec{r}(s)$
   c) Obtener $\mathcal{K}$ y $\mathcal{T}$ en cada punto de $\mathcal{C}$
   d) Verificar que $\mathcal{C}$ está en una superficie esférica y en una superficie plana.
      Rta.
      a) $L = 8\pi$
      b) $\vec{r}(s) = \left(\sqrt{6}cos\left(\frac{s}{4}\right), 4sen\left(\frac{s}{4}\right), \sqrt{10}cos\left(\frac{s}{4}\right)\right) \quad 0 \leq s \leq 8\pi$
      c) $k(t) = \frac{1}{4} \qquad \forall t$
      d) $\mathcal{T}(t) = 0\ \ \forall t$

8. Determinar la ecuación vectorial de curva definida por
   $x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = b^2 \quad a, b > 0$
   En $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ obtener ecuación de la recta y plano osculador
   (En particular en: $P_0 = \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, a, \sqrt{a^2 - b^2}\right)$