UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FECULTAD DE CIENCIAS
DEPTO. MATEMATICA Y COMPUTACION

CALCULO AVANZADO

SERIES DE FOURIER

COORDINADOR: Emilio Villalobos M.

I) Obtener la serie de Fourier de $y = f(x),\ x \in [-\pi . \pi]$, periódica de periodo 2π si:

1. $f(x) = x$ **Rta.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} sen(nx)$

2. $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ **Rta.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4sen((2n-1)x)}{\pi(2n-1)}$

3. $f(x) = \pi^2 - x^2$ **Rta.** $\displaystyle\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx)$

4. $f(x) = e^{|x|}$ **Rta.** $\displaystyle\frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(e^{\pi}-1)}{1+n^2} \cos(nx)$

5. $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ **Rta.** $\displaystyle\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen(nx)$

II) Obtener serie de Fourier $y = f(x),\quad x \in [-p, p]$, periódica de periodo $2p,\ \ p \in \mathbb{R}$ fijo si:

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & -2 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ **Rta.** $\displaystyle 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2} \frac{\cos\left(\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}x\right)}{\left(2n+1\right)^2} + \frac{sen\left(n\pi x\right)}{n\pi}$

2. $f(x) = 1 - |x|, \quad x \in [-1,1]$ **Rta.** $\displaystyle\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\left(2n-1\right)\pi x\right)}{\left(2n-1\right)^2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I) Obtener la serie de Fourier de $y = f(x), \quad x \in [a, b],$ periódica, de periodo $b - a, \quad a, b \in \mathbb{R}$

1. $f(x) = |\cos(x)|, \quad x \in [0,2\pi]$
2. $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
3. $f(x) = x^2, \quad x \in [1,3]$
4. $f(x) = \begin{cases} sen(2x) & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

II) Para funciones $y = f(x)$, con $x \in [0, p]$, obtener sus series de Fourier senos y cosenos, periódica de periodo $2p$ (Extensiones de medio rango).

1. $f(x) = \pi - x, \quad x \epsilon [0, \pi]$

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(1 - (-1)^n\right)}{\pi n^2} \cos(nx); \qquad S(x) = 2\sum_{n=1}^{n} \frac{sen(nx)}{n}$$

2. $f(x) = e^{-x}, \quad x \in [0, \pi]$

3. $f(x) = x^2 - x, \quad x \in [0,1]$

III) Aplicar el teorema de la convergencia puntual de series de Fourier en ejercicios precedentes para determinar el valor de suma de series numéricas (convergencia).

Ejemplo:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}; \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

IV) Aplicar la identidad de Parseval a series de Fourier

$$S(x) = a_{0+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\tfrac{nx\pi}{p}\right) + b_n sen\left(\tfrac{n\pi x}{p}\right)\right)$$

De funciones $y = f(x)$, $x \in [-p, p]$, periódicas de periodo 2π:

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\left(f(x)\right)^2 dx = 2a^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$ y deducir con esto las convergencias:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$