UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FECULTAD DE CIENCIAS
DEPTO. MATEMATICA Y COMPUTACION

# **CALCULO III** Para ingeniería civil

GUIA DE EJERCICIOS DE CURVAS

COORDINADOR: EMILIO VILLALOBOS MARIN

1. Dada la curva $C \in \mathbb{R}^3$ como $\vec{r}(t) = \left(\frac{1+\cos t}{2}, \frac{sent}{2}, \sqrt{2}sen\frac{t}{4}\right)$ con $t \in [0,2\pi]$ obtener los vectores unitarios $T, N, B$ en cada punto de $C$ y los escalares $\mathcal{K}(t), \mathcal{T}(t)$. En particular además evaluar en $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$.
2. Como ejercicio 1 para curvas dadas por
   a) $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{3}{2}t^2, \frac{3}{2}t^3\right)$ $t \in \mathbb{R}$; $P = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
   b) $\vec{r}(t) = \left(2\ln t, 4t, 1+2t^2\right)$ $t > 0$; $P = (0,4,3)$
3. Sea $C \in \mathbb{R}^3$ curva definida por el sistema $x^2 - y = 0$, $2x - z = 0$
   a) Parametrizar la curva como $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$
   b) Obtener los vectores $T, N, B$ y los escalares $\mathcal{K}(t), \mathcal{T}(t)$ en $P = (1,1,2)$
4. a) Para la curva $\vec{r}(s) = \left(arctags, \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+s^2), s - arctags\right)$ $s > 0$, longitud de arco, obtener $T(s), N(s), B(s), \mathcal{K}(s), \mathcal{T}(s)$.
   c) Lo mismo que en a) para $\vec{r}(s) = \left(\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}, \frac{2}{s+\sqrt{s^2+4}}, \sqrt{2}\ln\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}\right)$.
5. Usar las fórmulas de Serret-Frenet para deducir que si la curva $C$ es dada por $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s$ longitud de arco, entonces la curvatura $\mathcal{K}(s)$, $s$ longitud de arco, entonces la curvatura $\mathcal{K}(s)$ se puede calcular con la fórmula $\mathcal{K}^2(s) = \vec{r}\,'(s) \cdot \vec{r}\,'''(s)$.
   Aplicarla para la curva $C$ con $\vec{r}(s) = \left((1-s)^{\frac{3}{2}}, (1+s)^{\frac{3}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$, $0 \le s \le 1$
6. Para la curva plana ($C \in \mathbb{R}^2$) con $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t)\right)$, $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ establecer que su curvatura $\mathcal{K}(t)$ es dada por $\mathcal{K}(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$
   Aplicar la fórmula anterior para las curvas:
   a) $\vec{r}(t) = \left(a\cos t, asent\right)$ $t \in [0,2\pi]$
   b) $\vec{r}(t) = \left(a\cos t, bsent\right)$ $t \in [0,2\pi]$

Además establecer que la curva de a) tiene curvatura constante para todo $t$ y determina qué puntos de la curva en b) que corresponden a los valores que maximizan y minimizan la curvatura.

7.

a) Para la curva $C \in \mathbb{R}^3$ con $\vec{r}(t) = \left(2+t, 1+t^2, 3t+t^2\right)$ $t \in \mathbb{R}$ determinar los puntos en que $\mathcal{K}(t)$ sea máxima.

Indicación: de $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t)$, obtener $\mathcal{K}'(t)$ y los valores $t_i$ tal que $\mathcal{K}(t_i) = 0$ y variaciones de signos de derivadas.

c) Seguir las indicaciones de a) para la curva $\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3} - t, t^2, 1\right)$ $t \in \mathbb{R}$

8. Sea $C$ curva dada por $\vec{r}(t) = \left(\cos^2 t, sen^2 t, t+1\right)$ $t \in \mathbb{R}$
   - a) Obtener los vectores $T, N, B$ en $P_0 = (1,0,1)$
   - b) Calcular $\mathcal{K}$ en $P_0 = (1,0,1)$
   - c) Determinar la ecuación de la recta tangente, ecuación de la recta normal y ecuación del plano rectificador en $P_0$.
9. Sea $C \in \mathbb{R}^3$ definida por la intersección de superficies $y = x^2$, $z = \frac{2}{3}xy$
   - a) Parametrizar de la forma $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ $t \in \mathbb{R}$
   - b) Obtener curvatura y torsión para todo $t$.
   - c) Determinar la ecuación del plano osculador en $P_1 = \left(1,1,\frac{2}{3}\right)$
10. Si $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \geq 0$ corresponde a la posición de una partícula en movimiento en el instante $t$, describiendo una curva $C$ entonces $\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t)$, $\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| = v(t)$ corresponden a la velocidad y rapidez respectivamente. Verificar $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(s)s'(t) = Ts'(t) = v(t)T(s)$, o sea, la velocidad tiene la dirección de la tangente. De esto $\vec{r}\,''(t) = \vec{a}(t)$, aceleración del movimiento, verifica $a(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t) = v'(t)T + \mathrm{K}v^2 N$ ($T'(t) = T'(s)s'(t) = KvN$). Así el vector $\vec{r}\,''(t) = \vec{a}(t)$ está en el plano osculador
    - a) Probar que se cumple $\|\vec{a}(t)\|^2 = (a_T)^2 + (a_N)^2 \quad \forall t > 0$
    - b) Deducir que $a_T(t) = \frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)}{\|\vec{v}(t)\|}$ $\quad a_N(t) = \frac{\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)}{\|\vec{v}(t)\|}$ ( aplicación a la cinemática) $a_T(t)$, $a_N(t)$ se llaman componentes tangencial y normal respectivamente.
    - c) Para la trayectoria dada por la curva $\vec{r}(t) = \left(t^2, \frac{2}{3}t^3, t\right)$ en el instante $t = 1$ obtener $T(1), N(1), B(1), \mathcal{K}(1), \mathcal{T}(1), a_T(1), a_N(1)$

      Respuesta:

      $\vec{v}(1) = (2,2,1), a(1) = (2,4,0), T(1) = \frac{1}{3}(2,2,1), B(1) = \frac{1}{3}(-2,1,2),\ N(1) = \frac{1}{3}(-1,2,-2),\ \mathcal{K}(1) = \mathcal{T}(1) = \frac{2}{9},\ a_T(1) = 4,\ a_N(1)$=2

d) Obtener $a_T(t),\ a_N(t)$ para la curva $\vec{r}(t) = (t^2, 2t, t^3 - 1)$ en $P = (1,2,0)$

e) Para una partícula que se desplaza según la trayectoria $\vec{r}(t) = \left(cost, sent, e^{-t} - \frac{1}{2}\right)$ en $P = \left(1,0,\frac{1}{2}\right)$ obtener los vectores $\vec{v}, \vec{a}, T, N, B$ y los escalares $\mathcal{K},\ \mathcal{T},\ a_T,\ a_N$

11. Dada la curva $C \in \mathbb{R}^3$ como $\vec{r}(t) = (t, t^3, t)\ \ t \in \mathbb{R}$

a) Obtener la ecuación de la recta tangente en $P = (1,1,1)$ y la intersección de esta recta y el plano XZ.

b) Calcular la curvatura para todo t

c) Determinar los valores de t que maximizan y minimizan la curvatura

d) Verificar que la curva es plana y determinar la ecuación del plano donde se encuentra.

12. Establecer que para la curva C dada por $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , $0 \le s \le l(C)$, (s parámetro de longitud de arco) se verifica:

a) $N(s) \cdot B'(s) = -\mathcal{T}$

b) $T(s) \times N(s) \cdot N'(s) = \mathcal{T}(s)$

c) $\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s) \cdot \vec{r}'''(s) = \mathcal{K}^2(s)\mathcal{T}(s)$

Aplicar las igualdades para calcular $\mathcal{K}(s),\ \mathcal{T}(s)$ para la curva $C$ dada por $\vec{r}(s) = \left(1 + cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 1 - cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}ssen\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \quad 0 \le s \le l(C)$